

$GL(n) \times GL(n-1)$ の RANKIN-SELBERG p 進 L 関数の 構成の現状と課題について

—参考資料—

原 隆 (東京電機大学・未来科学部)

RIMS 合宿型セミナー『保型 L 関数の特殊値と付随する p 進 L 関数』

2016 年 9 月 22 日 於 美山町自然文化村 河鹿荘

導入部分と講演で用いられる記号等をまとめただけのものです。

§ 0.1 導入と背景

$GL(2)_{/\mathbb{Q}}$ の保型表現の p 進 L 関数 (楕円保型形式の p 進 L 関数)

MAZUR-SWINNERTON-DYER, MANIN, VIŠIK, AMICE-VÉLU, HIDA, PANCHISHKIN,

[落合理さん、小林真一さんの講演]

~~~~~ 高次代数群への様々な方向での一般化

★ シャライカ模型を用いた  $GL(2n)$  への一般化 (直交群の持ち上げとなっている場合)

ASH-GINZBURG, GEHRMANN

[並川健一さんの講演]

★ アイゼンシュタインコホモロジーを用いた (奇数次) 一般線形群  $GL(3)$  に対する取り組み

MAHNKOPF, GEROLDINGER

[平野雄一さんの講演]

★  $GL(n) \times GL(n-1)$  のランキン-セルバーグ畳み込み積への一般化

SCHMIDT, JANUSZEWSKI, etc. . . . .

[本講演]

$GL(n) \times GL(n-1)$  のランキン-セルバーグ  $p$  進  $L$  関数の構成の進展と現状

- Claus-Günther SCHMIDT [Sch93] **相対モジュラー記号** *relative modular symbol* を用いて  $GL(3) \times GL(2)_{/\mathbb{Q}}$  の  $p$  進  $L$  関数を構成 (コホモロジーの係数は定数)
- KAZHDAN, MAZUR, SCHMIDT [KMS00]  $GL(n) \times GL(n-1)_{/\mathbb{Q}}$  への拡張  
 $\chi, \chi^2, \dots, \chi^{n-1}$  が同じ  $p$  冪導手を持つような **非自明** 指標  $\chi$  で  $L$  関数の特殊値を補間するような分布 *distribution* を構成 コホモロジーの係数: 定数層
- SCHMIDT [Sch01] [KMS00] の一般化 BIRCH の補題の精密化,  $p$  通常な場合の分布の有界性
- KASTEN, SCHMIDT [KS13] 一般の **局所係数** の場合の  $GL(n) \times GL(n-1)_{/\mathbb{Q}}$  の  $L$  関数の臨界点での値の代数性,  $GL(3) \times GL(2)_{/\mathbb{Q}}$  の場合の “アルキメデスの周期項” の非自明性
- Fabian JANUSZEWSKI  
[Jan11] 定義体: 代数体, コホモロジーの係数: 定数層,  $p$  では不分岐を仮定  
[Jan15] 定義体: **総実** 代数体, コホモロジーの係数: 一般の局所系,  $p$  でのレベル付きに拡張  
[Jan16] 定義体: 代数体, コホモロジーの係数: 一般の局所系  
何れも  $p$  冪導手を持つ **非自明な** 指標での補間公式しか示されていない。

本講演では [Jan11, Jan15, Jan16] 辺りの文献に従い、**有理数体  $\mathbb{Q}$  上の** (局所係数での)  $GL(n) \times GL(n-1)$  のランキン-セルバーグ  $p$  進  $L$  関数の構成に向けたアイデアおよび問題点を概観する (したい)

## § 0.2 “主定理” の紹介

(記号は §0.3 以下を参照)

**主定理**  $\pi, \sigma$  の  $p$ -成分がそれぞれ  $\mathcal{I}_n^{(r)}, \mathcal{I}_{n-1}^{(r)}$  で固定されるベクトルを持つと仮定する。このとき  $\mathbb{Z}_p^\times$  上の分布  $\{\mu_{\pi, \sigma}^{(j)}\}_{j \in \text{Crit}}$  で以下を満たすものが存在する;

(1) (“補間性質”) (少なくとも)  $p^r \mid f_\chi$  なる導手  $f_\chi$  のディリクレ指標に対して

$$\int_{\mathbb{Z}_p^\times} \chi d\mu_{\pi, \sigma}^{(j)} = G(\chi)^{\frac{n(n-1)}{2}} f_\chi^{-\frac{(n-2)(n-1)n}{6}} \left( \frac{p^{j \cdot \frac{n(n-1)}{2}}}{\kappa_\lambda \kappa_{\lambda'}} \right)^{v_p(f_\chi)} \frac{L^{(p)} \left( \frac{1}{2} + j, (\pi \times \sigma) \otimes \chi \right)}{\Omega_{\pi, \sigma}^{\chi(-1)(-1)^j} \left( \frac{1}{2} + j \right)}$$

(2) (有界性)  $\pi, \sigma$  が  $p$  通常であるとき、即ち  $v_p(\kappa_\lambda \kappa_{\lambda'}) = j_{\min} \cdot \frac{n(n-1)}{2}$  を満たすとき、各  $d\mu_{\pi, \sigma}^{(j)}$  は有界測度となる (但し  $j_{\min} = \min\{j \mid j \in \text{Crit}\}$ )。

但し  $\Omega_{\pi, \sigma}^\pm \left( \frac{1}{2} + j \right)$  は “周期”、 $G(\chi)$  は  $\chi$  のガウス和、 $\kappa_\lambda, \kappa_{\lambda'}$  はそれぞれ “ $\pi_p, \sigma_p$  の  $V_p, V'_p$  作用素に関する固有値” (§0.5 参照)

**注** 局所係数のときには補間性質に問題がある (ように思われる)。また、以下のことはなされていない。

- ★ 不分岐指標 (今の状況では自明指標) での値の計算<sup>\*1</sup>
- ★ 円分指標 (ノルム指標) で臨界点を動かすこと ( $GL(2)$  での “MANIN のトリック”)

## § 0.3 基本的な設定

- (一応)  $p$  は奇素数,  $A$ ; 適当な係数環 (実用上の例:  $\mathbb{C}, E, \mathcal{O}_{E, (p)}$ ),  $m = n-1$  または  $n$
- 埋め込み  $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}, \overline{\mathbb{Q}}_p$  を固定
- $\tau = \bigotimes_q' \tau_q$  非自明な加法的指標で指数 0 のもの (つまり各  $\tau_q$  は  $U(\mathbb{Z}_q)$  で 0 となる)
- $\pi = \pi_\infty \otimes \pi_f$ :  $GL(n)_{/\mathbb{Q}}$  の ( $M_\mu$  に関して) コホモロジー的な既約尖点的保型表現<sup>\*2</sup>
- $\sigma = \sigma_\infty \otimes \sigma_f$ :  $GL(n-1)_{/\mathbb{Q}}$  の ( $M_\nu$  に関して) コホモロジー的な既約尖点的保型表現
- 表現  $V$  の反傾表現は  $\check{V}$  で書きます
- $M_\mu$ :  $GL(n)$  の最高ウェイト  $\mu$  の代数的既約表現

$$\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n), \quad \mu_1 > \mu_2 > \dots > \mu_n, \quad w = \mu_i + \mu_{n-i+1} \text{ (定数)}$$

<sup>\*1</sup>  $GL(3) \times GL(2)$  の場合は UNGEMACH の未発表論文で実行されていると [Jan16] などには書かれている

<sup>\*2</sup> この講演では「 $M_\eta$  に関してコホモロジー的」の定義の正規化が [宮崎, 森山, 森本] とは異なるので注意。[KS13] および JANUSZEWSKI の一連の論文に合わせました。

–  $M_\nu$ :  $GL(n-1)$  の最高ウェイト  $\nu$  の代数的既約表現

$$\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{n-1}), \quad \nu_1 > \nu_2 > \dots > \nu_{n-1}, \quad v = \nu_i + \nu_{n-i} \text{ (定数)}$$

–  $\text{Crit} = \{j \in \mathbb{Z} \mid \frac{1}{2} + j \text{ は } L(s, \pi \times \sigma) \text{ の臨界点}\}$  [宮崎直さん、森山知則さんの講演参照]

–  $\text{Emb}(\check{\nu}, \mu) := \{j \in \mathbb{Z} \mid \text{s.t., } \exists M_{\check{\nu}+(j)} \xrightarrow{GL(n-1)\text{-同変}} M_\mu\}$   
 $= \{j \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq \forall i \leq n-1 \quad \mu_i \geq \check{\nu}_i + j \geq \mu_{i+1}\}$  (branching law による)

**命題** (森山知則さんの講演の PROPOSITION, [KS13, Theorem 2.3])

関数等式の中心  $s = \frac{w+v+1}{2}$  が臨界点であるとき\*3(つまり  $\text{Crit} \neq \emptyset$  のとき)

$$\text{Emb}(\check{\nu}, \mu) \xrightarrow{1-1} \text{Crit}; j \mapsto \frac{1}{2} + j$$

**【証明の概略】**  $L_\infty(s, \pi \times \sigma)$  を明示的に  $\mu, \nu$  を用いて表し、臨界点を具体的に書き下すことで (宮崎直さんの講演で提示されたレシピによる)、 $\text{Emb}(\check{\nu}, \mu)$  と比較する。 (“geometric interpretation” は講演で与える)  $\square$

#### § 0.4 行列に関する記号

$A$  は適当な係数環とする。

–  $j: GL_{n-1}(A) \hookrightarrow GL_n(A); g \mapsto \left( \begin{array}{c|c} g & \\ \hline & 1 \end{array} \right)$  対角埋め込み

–  $f = p^e$  に対して  $t_f^{(m)} = \begin{pmatrix} f^{m-1} & & & \\ & f^{m-2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & f \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \quad (m = n-1, n)$

–  $w_m = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & & \\ & & 1 & \\ & \ddots & & \\ 1 & & & \end{pmatrix} \in GL_m(\mathbb{Z})$  (最長ワイル元),  $h^{(1)} = \left( \begin{array}{c|c} & 1 \\ & \vdots \\ & 1 \\ \hline & 1 \end{array} \right)$   
 $f = p^r$  に対して

$$h^{(f)} = \left( t_f^{(n)} \right)^{-1} h^{(1)} t_f^{(n)} = \left( \begin{array}{cccc|cccc} & & & & f^{-(n-2)} & & & f^{-(n-1)} \\ & & & & & f^{-(n-2)} & & \\ & & & & & & & \vdots \\ & & & & & & & f^{-2} \\ & & & & & & & f^{-1} \\ f^{n-2} & f^{n-4} & & \ddots & & & & 1 \end{array} \right)$$

“魔法の行列” *magic matrix* [Sch01, Jan16]

–  $\mathcal{I}_m^{(r)} = \{g \in GL_m(\mathbb{Z}_p) \mid \text{mod } p^r \text{ で上半三角}\}$  レベル  $p^r$  の岩堀部分群

–  $K_{m,\infty} = O_m(\mathbb{R})$   $GL_m(\mathbb{R})$  の (標準的な) 極大開コンパクト部分群

$K_{m,\infty}^\circ = SO_m(\mathbb{R})$   $K_{m,\infty}$  の連結成分

\*3 この条件は「 $w \equiv v \pmod{2}$ 」と同値 [KS13, Proposition 2.2]

## § 0.5 ヘッケ環に関する記号

- $G = G_m = GL_m(\mathbb{Q}_p)$ ,  $K = K_m = GL_m(\mathbb{Z}_p)$ ,  
 $K_{\mathcal{I}^{(r)}} = K_{\mathcal{I}^{(r)},m} = \mathcal{I}_m^{(r)}$ : レベル  $p^r$  の岩堀部分群  
 $T^+ = T_m^+ \{\text{diag}(a_1, \dots, a_m) \in GL_m(\mathbb{Q}_p) \mid |a_1|_p \leq |a_2|_p \leq \dots \leq |a_m|_p\}$ ,  
 $\Delta_{\mathcal{I}^{(r)}} = \Delta_{\mathcal{I}^{(r)},m} = K_{\mathcal{I}^{(r)}} T^+ K_{\mathcal{I}^{(r)}}$   
 $B = B_m = B_m(\mathbb{Q}_p)$ : 上三角ボレル部分群,  $K_B = K_{B,m} = B_m(\mathbb{Z}_p) = K_m \cap B_m$
- ヘッケ対  $(\mathcal{K}, \mathcal{G})$  に対して (両側剰余類による) ヘッケ環  $\mathcal{H}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{K}, \mathcal{G})$  を定義  
 $\rightsquigarrow$   $\exists$  ヘッケ環の埋め込みの図式

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{H}_{\mathbb{Q}}(K_B, B) & \\ \nearrow & & \nwarrow \\ \mathcal{H}_{\mathbb{Q}}(K, G) & \hookrightarrow & \mathcal{H}_{\mathbb{Q}}(K_{\mathcal{I}^{(r)}}, \Delta_{\mathcal{I}^{(r)}}) \end{array}$$

- $T_{\nu} = K \left( \begin{array}{c|c} I_{m-\nu} & \\ \hline & pI_{\nu} \end{array} \right) K \in \mathcal{H}_{\mathbb{Q}}(K, G)$   
 $H_p(\mathbb{T}) = \sum_{\nu=0}^m (-1)^{\nu} p^{\frac{\nu(\nu-1)}{2}} T_{\nu} \mathbb{T}^{\nu} \in \mathcal{H}_{\mathbb{Q}}(K, B)[\mathbb{T}]$  ヘッケ多項式

**命題** (GRITSENKO, [Gri86, Gri90])

放物型ヘッケ環の元  $U_{\nu} = K_B \left( \begin{array}{c|c|c} I_{\nu-1} & & \\ \hline & p & \\ \hline & & I_{n-\nu-1} \end{array} \right) K_B$  を用いて、ヘッケ多項式  $H_p(\mathbb{T})$

は  $\mathcal{H}_{\mathbb{Q}}(K_B, B)$  で  $H_p(\mathbb{T}) = \prod_{\nu=1}^m (\mathbb{T} - U_{\nu})$  と因数分解される。

- $V_{p,\nu}^{(m)} = p^{-\frac{\nu(\nu-1)}{2}} \prod_{k=1}^{\nu} U_k$  (実はこれは  $\mathcal{H}_{\mathbb{Q}}(K_{\mathcal{I}^{(r)},m}, \Delta_{\mathcal{I}^{(r)},m})$  の元)

$$V_p^{(n)} = \prod_{\nu=1}^{n-1} V_{p,\nu}^{(n)}, \quad V_p'^{(n-1)} = \prod_{\nu=1}^{n-1} V_{p,\nu}^{(n-1)}, \quad U_p = V_p^{(n)} \otimes V_p'^{(n-1)}$$

- 局所 WHITTAKER 関数  $w_p \in \mathcal{W}(\pi_p, \tau_p)$  の “固有値”  $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$  に対して (つまり

$$H(\lambda_i)w_p = 0 \text{ となる } \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \text{ に対して}) \quad \eta_{\nu} = p^{-\frac{\nu(\nu-1)}{2}} \prod_{k=1}^{\nu} \lambda_k, \quad \kappa_{\underline{\lambda}} = \prod_{\nu=1}^{n-1} \eta_{\nu} \text{ と定める。}$$

同様に  $v_p \in \mathcal{W}(\sigma_p, \tau_p^{-1})$  の “固有値”  $\underline{\lambda}' = (\lambda'_1, \dots, \lambda'_{n-1})$  に対して (つまり  $H(\lambda'_i)v_p = 0$  と

$$\text{なる } \lambda'_1, \dots, \lambda'_{n-1} \text{ に対して}) \quad \eta'_{\nu} = p^{-\frac{\nu(\nu-1)}{2}} \prod_{k=1}^{\nu} \lambda'_k, \quad \kappa_{\underline{\lambda}'} = \prod_{\nu=1}^{n-1} \eta'_{\nu} \text{ と定める。}$$

## § 0.6 コホモロジー的解釈のための記号

- 群  $\mathcal{G}$  の部分群  $\mathcal{K}$  とその元  $g$  に対して  ${}^g\mathcal{K} := g\mathcal{K}g^{-1}$ ,  $\mathcal{K}^g := g^{-1}\mathcal{K}g$
- $K_m \subset GL_m(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{(\infty)})$  開コンパクト  $j(K_{n-1}) \subseteq K_n$ ,  $\det(K_n) = \det(K_{n-1})$ ,  $\phi_i$  や  $\varphi_i$  を固定  
 $K_{m,p} = \mathcal{I}_m^{(r)}$  となるように、かつ  $GL_m(\mathbb{Q}) \cap ({}^cK_m)$  が任意の  $c \in GL_m(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{(\infty)})$  に対して振  
 れ元を持たないようにとる ( $\rightsquigarrow \mathcal{X}_m(K_m)$ ,  $\mathcal{X}_m^{\text{ad}}(K_m)$  などが多様体となる)

- $\mathcal{X}_m(K_m) := GL_m(\mathbb{Q}) \backslash GL_m(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}) / K_m K_{m,\infty}^\circ$   
 $\downarrow \text{ad}$   
 $\mathcal{X}_m^{\text{ad}}(K_m) := GL_m(\mathbb{Q}) \backslash GL_m(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}) / K_m K_{m,\infty}^\circ \mathbb{R}_+^\times$
- $\underline{M}_\eta(A)$ :  $M_\eta(A)$  に付随する  $\mathcal{X}_m^{(\text{ad})}(K_m)$  上の局所系 (但し  $\eta = \mu$  または  $\sigma$ )
- $h \in GL_m(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{(\infty)})$  に対して  $t_h: \mathcal{X}_m^{(\text{ad})}(^h K_m) \rightarrow \mathcal{X}_m^{(\text{ad})}(K_m); [x] \mapsto [xh]$  右平行移動  
 $s_h: \mathcal{X}_m(^h K_m) \xrightarrow{t_h} \mathcal{X}_m(K_m) \xrightarrow{\text{ad}} \mathcal{X}_m^{\text{ad}}(K_m)$
- $j: \mathcal{X}_{n-1}(K_{n-1}) \rightarrow \mathcal{X}_n(K_n) \quad j: GL(n-1) \hookrightarrow GL(n)$  から誘導される写像
- 開コンパクト部分群  $\tilde{K} \subset GL_m(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{(\infty)})$  に対して  $C(\tilde{K}) = \mathbb{Q}^\times \backslash \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^\times / \det(\tilde{K}) \mathbb{R}_+^\times$   
 $\dots\dots \mathcal{X}_m(K_m)$  の連結成分のラベル
- $[c] \in C(\tilde{K}) = \mathbb{Q}^\times \backslash \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^\times / \det(\tilde{K}) \mathbb{R}_+^\times$  に対して  $\mathcal{X}_m(\tilde{K})[c] := \det^{-1}([c]) \dots\dots [c]$  成分
- $h \in GL_n(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{(\infty)}), h' \in GL_{n-1}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{(\infty)})$  に対して  $(^h, ^{h'}) K_{n-1} := j^{-1}(^h K_n) \cap ^{h'} K_{n-1}$

次の「コホモロジー的モジュラー記号ペアリング」が重要な役割を担う。

$$\begin{aligned}
 & h \in GL_n(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{(\infty)}), h' \in GL_{n-1}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{(\infty)}), x \in C(^{h, h'} K_{n-1}) \text{ に対して} \\
 & \mathcal{B}_{h, h', c}^{K_n, K_{n-1}} : H_c^{b_n}(\mathcal{X}_n^{\text{ad}}(K_n), \underline{M}_\mu(A)) \otimes H_c^{b_{n-1}}(\mathcal{X}_{n-1}^{\text{ad}}(K_{n-1}), \underline{M}_\nu(A)) \\
 & \hspace{15em} \longrightarrow H^0(SL_{n-1}(\mathbb{Z}), j^* M_\mu(A) \otimes M_\nu(A)) \\
 & \alpha \otimes \beta \quad \mapsto \quad \int_{\mathcal{X}_{n-1}(^{h, h'} K_{n-1})[c]} j^* s_h^* \alpha \cup s_{h'}^* \beta
 \end{aligned}$$

### § 参考: Jacquet-Piatetski-Shapiro-Shalika 理論 [JPSS83] の復習

素点  $q$  に於ける局所 WHITTAKER 関数  $w_q \in \mathcal{W}(\pi_q, \tau_q), v_q \in \mathcal{W}(\sigma_p, \tau_q^{-1})$  に対して **局所ゼータ積分** を  $\mathcal{Z}_q(w_q \otimes v_q, s) := \int_{U_{n-1}(\mathbb{Q}_q) \backslash GL_{n-1}(\mathbb{Q}_q)} w_q(j(g)) v_q(g) |\det g|_q^{s-\frac{1}{2}} dg$  で定義  
 $\rightsquigarrow q$  が有限素点のとき、像はローラン多項式環  $\mathbb{C}[q^{\pm s}]$  の単項分数イデアルを定める  
 $q$  が有限素点のとき、 $P_q(X) \in \mathbb{C}[X]$  で  $P_q(0) = 1, P(q^{-s})^{-1}$  が  $\mathcal{Z}_q$  の像を生成するような唯一のものをとり、局所  $L$  因子を  $L_q(s, \pi \times \sigma) = P_q(q^{-s})^{-1}$  と定める。

- 有限素点  $q$  に対しては、ちょうど  $\mathcal{Z}_q(t_q^\circ, s) = L_q(s, \pi \times \sigma)$  を満たすような“良いテンソル”  $t_q^\circ \in \mathcal{W}(\pi_q, \tau_q) \otimes \mathcal{W}(\sigma_q, \tau_q^{-1})$  が存在 (純テンソルとは限らない!)
- $\pi, \sigma$  がともに  $q$  で不分岐なら、 $t_q^\circ$  として“クラス 1” WHITTAKER 関数のテンソル積  $t_q^\circ = w_q^\circ \otimes v_q^\circ$  が取れる (新谷の明示公式)
- ( $\pi$  が  $q$  で分岐していても)  $\sigma$  が  $q$  で不分岐なら、 $w_q^\circ$  を new vector に対応する WHITTAKER 関数とし、 $v_q^\circ$  を“クラス 1”関数として“良いテンソル”を  $t_q^\circ = w_q^\circ \otimes v_q^\circ$  と取れる (JACQUET-PIATETSKI-SHAPIRO-SHALIKA? 宮内通孝さんの明示公式 etc...)

素点  $q$  ( $q \neq p, \infty$ ) では“良いテンソル”  $t_q^\circ$  を選んでおく。素点  $p$  では取り敢えず  $\mathcal{I}_m^{(r)}$  で**固定される任意の**  $w_p, v_p$  を選んでおく (後に選び方を指定; “ $p$  安定化”)。無限素点  $\infty$  では、 $(\mathfrak{g}, K)$ -コホモロジーの 1 次元性を用いて適切に選ぶ\*4

これらの“良いテンソル”を束ねたものを純テンソルの和に分解;

$$(w_\infty \otimes v_\infty) \otimes (w_p \otimes v_p) \otimes \bigotimes_{q \neq p, \infty} t_q^\circ = \sum_{\iota} w_\iota \otimes v_\iota$$

(以下この分解を固定;  $p$  進  $L$  関数の構成は、この分解に依存する)。各純テンソル  $w_\iota \otimes v_\iota$  はフーリエ変換により保型形式 (のテンソル)  $\phi_\iota \otimes \varphi_\iota$  に変換される。

$\rightsquigarrow$  (大域ゼータ積分)

$$\begin{aligned} \sum_{\iota} \int_{GL_{n-1}(\mathbb{Q}) \backslash GL_m(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})} \phi_\iota(j(g)) \varphi_\iota(g) \|\det g\|^{s-\frac{1}{2}} dg &= \prod_{\iota} \mathcal{Z}_q(t_q, s) \\ &= L^{(p\infty)}(s, \pi \times \sigma) \mathcal{Z}_p(w_p \otimes v_p, s) \mathcal{Z}_\infty(w_\infty \otimes v_\infty, s) \end{aligned}$$

## 参考文献

- [Gri86] Valeri A. GRITSENKO, *Parabolic extensions of the Hecke ring of the general linear group*, Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI) **154** (1986), Modul. Funktsii i Kvadrat. Formy. 1, 56–76, 165, 167; translation in J. Soviet Math., **62**, no. 4 (1988), 2869–2882.
- [Gri90] Valeri A. GRITSENKO, *Parabolic extensions of the Hecke ring of the general linear group II*, Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI) **183** (1990), Anal. Teor. Chisel i Teor. Funktsii. 7, 36–45, 176; translation in J. Soviet Math., **43**, no. 4 (1988), 2533–2540.
- [Jan11] Fabian JANUSZEWSKI, *Modular symbols for reductive groups and  $p$ -adic Rankin-Selberg convolutions over number fields*, J. Reine Angew., **653** (2011), 1–45.
- [Jan15] Fabian JANUSZEWSKI, *On  $p$ -adic  $L$ -functions for  $GL(n) \times GL(n-1)$  over totally real fields*, Int. Math. Res. Notices, Volume **2015**, Number 17 (2015), 7884–7949.
- [Jan16] Fabian JANUSZEWSKI,  *$p$ -adic  $L$ -functions for Rankin-Selberg convolutions over number fields*, Ann. Math. Québec, special issue in honor of Glenn STEVEN’s 60th Birthday, **40** (2016), 453–489.
- [JPSS83] Hervé JACQUET, Ilya I. PIATETSKII-SHAPIRO and Joseph Andrew SHALIKA, *Rankin-Selberg convolutions*, Amer. J. Math., **105**, no. 2 (1983), 367–464.
- [KMS00] David KAZHDAN, Barry MAZUR and Claus-Günther SCHMIDT, *Relative modular symbols and Rankin-Selberg convolutions*, J. Reine Angew. Math., **519** (2000), 97–141.
- [KS13] Hendrik KASTEN and Claus-Günther SCHMIDT, *The critical values of Rankin-Selberg convolutions*, Int. J. Number Theory, Volume **9**, Number 1 (2013), 205–256.
- [Sch93] Claus-Günther SCHMIDT, *Relative modular symbols and  $p$ -adic Rankin-Selberg convolutions*, Invent. Math., **112** (1993), 31–76.
- [Sch01] Claus-Günther SCHMIDT, *Period relations and  $p$ -adic measures*, Manuscr. Math., **106** (2001), 177–201.

---

\*4 “一般化 EICHLER-志村の議論,” 森本和輝さんの講演で与えられたレシビを参照