大域的一般化 Birch の補題

[Jan15, Theorem 4.4.]

$$\sum_{\iota}\int_{GL_{n-1}(\mathbb{Q})\backslash GL_{n-1}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})}\phi_{\iota}(j(g)t^{(n)}_{(ff_{\chi}^{-1})}h^{(f)})\varphi_{\iota}(gff_{\chi}^{-1}t^{(n-1)}_{ff_{\chi}^{-1}})\chi(\det g)\|\det(g)\|^{s-\frac{1}{2}}\,dg$$
$$=\Omega(w_{\infty}\otimes v_{\infty},\chi_{\infty})(s)\delta^{(f)}(w_p\otimes v_p,\chi_p)(\chi(f_{\chi})G(\chi))^{\frac{n(n-1)}{2}}f_{\chi}^{-\frac{n(n-1)}{2}}f^{-\frac{n(n-1)(n-2)}{6}}\cdot L^{\{p\}}(s,(\pi\times\sigma)\otimes\chi)$$

$\Omega(w_{\infty}\otimes v_{\infty},\chi_{\infty})(s)$: アルキメデス素点でのゼータ積分と L 因子 (ガンマ因子) のずれ

$$\delta^{(f)}(w_p\otimes v_p,\chi_p)=w_p(t^{(n)}_{ff_{\chi}^{-1}})v_p(ff_{\chi}^{-1}t^{(n-1)}_{ff_{\chi}^{-1}})\prod_{k=1}^{n}(1-p^{-k})^{-1}$$

※ $\delta^{(f)}(w_p\otimes v_p,\chi_p)$ の部分がキャンセルするように後程 w_p, v_p を定める

有限指標 χ が各成分で定数となるように領域を分割すると [Jan15, Corollary 4.5.]

$$\sum_{\iota}\sum_{x}\chi(x)\int_{C_f}\phi_{\iota}(j(gd^{(x)})t^{(n)}_{(ff_{\chi}^{-1})}h^{(f)})\varphi_{\iota}(gd^{(x)}ff_{\chi}^{-1}t^{(n-1)}_{ff_{\chi}^{-1}})\|\det(gd^{(x)})\|^{s-\frac{1}{2}}\,dg$$
$$=\Omega(w_{\infty}\otimes v_{\infty},\chi_{\infty})(s)\delta^{(f)}(w_p\otimes v_p,\chi_p)(\chi(f_{\chi})G(\chi))^{\frac{n(n-1)}{2}}f_{\chi}^{-\frac{n(n-1)}{2}}f^{-\frac{n(n-1)(n-2)}{6}}\cdot L^{\{p\}}(s,(\pi\times\sigma)\otimes\chi)$$

$$C_f=\det{}^{-1}\left(\mathbb{Q}^{\times}\backslash\mathbb{Q}^{\times}(1+f)\prod_{q\nmid f}U_q\right),$$

x は $\mathbb{Q}^{\times}\backslash\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{\times}/(1+f)\prod_{q\nmid f}U_q$ の代表系を動く