

コホモロジー的 *modular symbol* ペアリング

[Jan16, Section 6.]

$$h \in GL_n(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{(\infty)}), \quad h' \in GL_{n-1}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{(\infty)}), \quad (h, h')K' = j^{-1}(hK) \cap h'K'$$

$$c \in C((h, h')K') = \mathbb{Q}^{\times} \backslash \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{\times} / \det(h, h')K' \mathbb{R}_+^{\times} \quad (\mathcal{X}_{n-1}((h, h')K') \text{ の連結成分のラベル) に対して}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{h, h', c}^{K, K'}: H^{b_n}(\mathcal{X}_n^{\text{ad}}(K); \underline{M}_{\mu}(A)) \otimes H^{b_{n-1}}(\mathcal{X}_{n-1}^{\text{ad}}(K'); \underline{M}_{\nu}(A)) \\ \longrightarrow H^0(\mathcal{X}_{n-1}((h, h')K')[c]; j^* s_{\textcolor{red}{h}}^* \underline{M}_{\mu}(A) \otimes s_{\textcolor{blue}{h}'}^* \underline{M}_{\nu}(A)) \end{aligned}$$

$$\alpha \otimes \beta \longmapsto \int_{\mathcal{X}_{n-1}((h, h')K')[c]} j^* s_{\textcolor{red}{h}}^* \alpha \cup s_{\textcolor{blue}{h}'}^* \beta \quad (A = E \text{ または } \mathcal{O}_{E, (p)})$$

$A = E$ のとき target は群コホモロジー $H^0(SL_{n-1}(\mathbb{Z}); j^* M_{\mu}(E) \otimes M_{\nu}(E)) \cong E^{\text{Crit}}$ と自然に同型
(特に $\textcolor{red}{h}$, $\textcolor{blue}{h}'$, $\textcolor{brown}{c}$ に依らない)

$A = \mathcal{O}_{E, (p)}$ のとき 局所系 $\underline{M}_{\textcolor{teal}{?}}(E)$ の整構造 $\underline{M}_{\textcolor{teal}{?}}(\mathcal{O}_{E, (p)})$ を適切に定め、平行移動写像 t_h etc... から誘導される種々の関手 (同一視) を用いて target と

$$H^0(SL_{n-1}(\mathbb{Z}); \textcolor{brown}{d}_{(\textcolor{brown}{c})} \textcolor{red}{h} j^* M_{\mu}(\mathcal{O}_{E, (p)}) \otimes \textcolor{brown}{d}_{(\textcolor{brown}{x})} \textcolor{blue}{h}' M_{\nu}(\mathcal{O}_{E, (p)}))$$

を $H^0(SL_{n-1}(\mathbb{Z}); j^* M_{\mu}(E) \otimes M_{\nu}(E))$ の部分空間として 同一視