

GSp_4 の肥田理論について

山内 卓也 (大阪府立大学)¹

0. 序文

本稿では Tilouine-Urban の論文 [7] で構成された Siegel-Hilbert Hecke eigensystems の p 進 family の構成およびそれに付随するガロア表現について解説する.

以下, p は素数, F は総実代数体, K は $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大でその整数環を $\mathcal{O}$ とする. また, $\mathbb{C} \leftarrow \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$ を固定し, $\mathcal{O}$ はある Dedekind 環 $\mathcal{O}_0/\mathbb{Z}$ のこの埋め込みによる p 進完備化となっているとする.

CONTENTS

1. Introduction	1
2. Control theorem	3
2.1. p -semilocal Hecke algebra	5
2.2. Hida group	6
2.3. Hida's idempotent	7
2.4. Level の control と weight の idependence	8
3. Shimura varieties for GSp_4/F	10
4. parabolic cohomology の control	11
5. A family of eigensystems	14
6. Galois representation associated to a Hida family	15
References	16

1. INTRODUCTION

$V_{m,n}$ を $Sp_4(\mathbb{R})$ の既約代数的表現で最高 weight が $(m, n), m \geq n \geq 0$ であるものとし, $\Gamma \subset Sp_4(\mathbb{Q})$ を振れ点を持たない数論的部分群とする. このとき, Faltings-Chai の結果より, Hecke 加群としての埋め込み

$$M_{m+3,n+3}(\Gamma) \hookrightarrow H^3(\Gamma, V_{m,n}) = H^3(\Gamma \backslash \mathcal{H}_2, \mathcal{V}_{m,n})$$

$$S_{m+3,n+3}(\Gamma) \hookrightarrow H^3_!(\Gamma, V_{m,n}) = H^3_!(\Gamma \backslash \mathcal{H}_2, \mathcal{V}_{m,n})$$

が存在する (cf. [1] の p.42 の 3.8 節を参照). ただし, $M_{k,l}(\Gamma)$ (resp. $S_{k,l}(\Gamma)$) は次数 2, 重さ (k, l) の Siegel modular (resp. cusp) forms の成す空間, $\mathcal{V}_{m,n}$ は $V_{m,n}$ に付随する Siegel threefold $\Gamma \backslash \mathcal{H}_2$ 上の局所系である.

¹これは 2010.8.6 に阪大で行われた GSp_4 の勉強会の講演ノートです. 講演中曖昧な部分や間違った部分が dense に存在したのでこの場を借りて訂正・補足させていただきます. 著者の不理解により皆様に迷惑をかけたこととお詫び致します.

さて, Hida family というのは重さ (m, n) を p 進的に補間するような weight space $\mathcal{X}$ 上の p -adic family であって, 各 $(m, n) \in \mathcal{X}$, $m \geq n \geq 0$ 上のファイバー空間が

$$M_{m+3, n+3}(\Gamma), S_{m+3, n+3}(\Gamma), H^3(\Gamma, V_{m, n}), H^3_!(\Gamma, V_{m, n})$$

のような対象に一致するようなものである. $M_{m+3, n+3}(\Gamma)$ の元のような対象 (form) を用いて, Hida family を構成しようとする, $GL(2)/\mathbb{Q}$ の場合と違って, 困難が多い上, (恐らくは) 一変数の family しか構成できないので, 群コホモロジー $H^3(\Gamma, V_{m, n})$ の cohomology class を p 進的に “変形” させて, しかるべき次元をもつ p -adic family (Hida family) を作ることをここでは行っている.

Hida family の構成は大雑把に説明すると次のようになる. $Sp_4(\mathbb{R})$ の数論的部分群 $\Gamma_1(p^s)$, $s \geq 1$ (各 $s \geq 1$ に対して, $\Gamma_1(p^{s+1}) \subset \Gamma_1(p^s)$ は正規部分群になっている) とある $\frac{1}{p^r}\mathcal{O}/\mathcal{O}$ 上の有限生成加群 L_r からなる (Mittag-Leffler 条件を満たす) 帰納系 $\{L_r\}_r$ をもってきて,

$$V = \varinjlim_{\substack{s, r \\ s > r}} H^3(\Gamma_1(p^s), L_r), V_! = \varinjlim_{\substack{s, r \\ s > r}} H^3_!(\Gamma_1(p^s), L_r), V_\partial = \varinjlim_{\substack{s, r \\ s > r}} H^3(\partial\Gamma_1(p^s), L_r),$$

なるものを考える (右二つの対象は $\Gamma_1(p^s) \backslash \mathcal{H}_2$ の Borel-Serre コンパクト化を用いて定義される). これらは一般には大きすぎる加群なのだが, GSp_4 の parabolic subgroup Q ごとに定まる Hida の冪等元 $e = e_Q \in \text{End}(V_*)$, $* \in \{, !, \partial\}$ とよばれるものでこれらの群コホモロジーを切り落とすと, それらの Pontryagin dual は Hida-Iwasawa algebra $\Lambda(\mathcal{O}$ 係数の多変数形式冪級数環) 上有限生成となる. eV_* は “ (p, Q) -ordinary” cohomology classes を束ねたような, 普遍的加群であることがわかる. これは適当な不変部分をとると, 通常の classical な (p, Q) -ordinary cohomology classes がほぼすべて得られるようになっていることを意味する. このような型の主張を control theorem というにすることにする.

一番大事な所は cuspidal part を含む $eV_!$ の control theorem であるがこれは,

$$0 \longrightarrow eV_! \longrightarrow eV \longrightarrow eV_\partial$$

という Hecke 加群として完全列があるので, eV と eV_∂ の control theorem から得られる².

この論文 [7] では, 群コホモロジーをうまく control するため, weight に regular という条件が課せられている. これは上で登場した $V_{m, n}$ (または $M_{m+3, n+3}(\Gamma)$) の重さ (m, n) が $m > n \geq 0$ であることに対応する. 従って, scalar valued Siegel modular forms ($m = n$) の場合は [7] では除外されていることを注意しておく. 一方, これより前の結果として, Taylor は一変数の Hida family を form (p -adic Eisenstein series) を用いて構成している [5].

[7] の後半ではさらに $eV_!$ の Pontryagin 双対が Hida-Iwasawa algebra Λ 上有限かつ平坦な加群となることが証明され, Taylor の GSp_4 に対する擬表現の理論 [5] と GSp_4 の保型表現に付随するガロア表現の存在定理を仮定することで Λ 上有限平坦な整域 J の分数体を係数にもつガロア表現

$$r_J : \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \longrightarrow \text{GSp}_4(\text{Frac}(J))$$

が構成されている. さらに, automorphic ordinarity がガロア表現の ordinarity を導くという予想を仮定し, $r_J(\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)) \subset \widehat{Q}(\text{Frac}(J))$ (up to conjugacy in $\text{GSp}_4(\text{Frac}(J))$) となるこ

²ただし, p には条件がつく.

とも示している. ただし, $\widehat{Q}$ は $GS p_4$ の Langlands dual 内への Q の行き先とする (予想 2 参照).

以上の説明は $\mathbb{Q}$ 上の話であったが, 総実体上でも保型表現に対応するガロア表現の存在を認めれば同様のことが成立する.

ちなみに, $F = \mathbb{Q}$ の場合は上で仮定した予想は証明されている (注意 3 を参照).

2. CONTROL THEOREM

この節では control theorem について述べる.

$GS p_4 = \{g \in GL_4 \mid {}^t g J g = \nu(g) J, \nu(g) \in \mathbb{G}_m\}$ とする. ただし, $J = \begin{pmatrix} 0_2 & I_2 \\ -I_2 & 0_2 \end{pmatrix}$ とおく. $F/\mathbb{Q}$ を総実代数体, $G = \text{Res}_{F/\mathbb{Q}}(GS p_4/F)$ としその derived group を $G^1 := [G, G] = \text{Res}_{F/\mathbb{Q}}(Sp_4/F)$ とおく. G の parabolic subgroup Q を 1 つ固定し (up to conjugacy で Borel, Siegel, Klingen のどれかとなる), その Levi 分解 を $Q = MQ^+$ とする. $Q' = Q \cap G^1 = M'Q^+$, $M' = M \cap G^1$ とおく. $\rho : M/\mathcal{O} \rightarrow GL(V/\mathcal{O})$ を既約代数的表現とし, その generic fiber $\rho \otimes K$ は絶対既約であると仮定する, 自然な全射 $Q \rightarrow M$ があるから, これと ρ の合成を再び ρ で表し, $(\rho \otimes K)|_{Q'}$ の G^1 への algebraic induction を

$$L(\rho, K) := \text{Ind}_{Q'}^{G^1}((\rho \otimes K)|_{Q'}) \\ = \left\{ f : G_K^1 \rightarrow \mathbb{A}_K^1 \otimes_K V_K \left| \begin{array}{l} f \text{ は regular map} \\ \text{任意の } K \text{ 代数 } R \text{ に対して, } f(gmu) = \rho^{-1}(m)f(g) \\ \text{for } (g, m, u) \in G^1(R) \times M'(R) \times Q^+(R) \end{array} \right. \right\}$$

とする³. $L(\rho, K)$ は有限生成 K 加群である. $g, h \in G^1(K)$ と $f \in L(\rho, K)$ に対して, $(g \cdot f)(h) = f(g^{-1}h)$ と定めることによって, $G^1(K)$ を $L(\rho, K)$ 上に左から作用させる.

次に $L(\rho, K)$ 内に lattice を定め, 1 節で登場した捩れ係数 L_r にあたるものを定義する.

$f \in L(\rho, K)$ をとると, $G^1(K)$ 上では $Q^+(K)$ 経由するので, $f|_{G^1(K)}$ は p -adic manifold $Y_Q(K) = G^1(K)/Q^+(K)$ 上のベクトル値関数と思える.

ここで, 自然な全射 $Y_Q(K) \xrightarrow{\pi} X_Q(K) := G^1(K)/Q'(K)$ を考え, 各 $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して, $X_Q(K)$ の p -adic open subset $X_{Q,\alpha}$ を次のように定義し, それを用いて, $Y_{Q,\alpha} := \pi^{-1}(X_{Q,\alpha})$ とおく. これは $Y_Q(K)$ の p -adic open subset となる:

$(W, \langle *, * \rangle)$ を standard symplectic module とし, W の standard basis を $\{e_1, e_2, f_1, f_2\}$, $\langle e_i, f_i \rangle = 1, i = 1, 2$ とする (それ以外の組み合わせの pairing は 0).

このとき, 一般に, $\mathcal{O}$ 代数 A に対して, $X_{Q,\alpha}$ は次の flags の成す集合.

- $Q = \text{Borel}$ のとき,

$W \otimes A$ の maximal isotropic direct factors E_1, E_2 であって, $(E_1, E_2) \equiv (\langle e_1 \rangle, \langle e_1, e_2 \rangle) \pmod{p^\alpha}$ なるもの.

- $Q = \text{Siegel}$ のとき,

³ $G = GL_2/\mathbb{Q}$ のときは, $Q^+ = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, $M' = \{\text{diag}(a, a^{-1}) \mid a \in \mathbb{G}_m\} \simeq \mathbb{G}_m$ であり, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して, $\delta_k : M' \rightarrow \mathbb{G}_m$ を $\text{diag}(a, a^{-1}) \mapsto a^k$ とおくと, $L(\delta_k, K) = \text{Sym}^k \text{St}_2/K$ となる.

$W \otimes A$ の maximal isotropic direct factors E_2 であって, $E_2 \equiv \langle e_1, e_2 \rangle \pmod{p^\alpha}$ なるもの.

• $Q = \text{Klingen}$ のとき,

$W \otimes A$ の maximal isotropic direct factors E_1 であって, $E_1 \equiv \langle e_1 \rangle \pmod{p^r}$ なるもの.

このとき, 各 $\alpha \geq 1$ に対して, $L(\rho, K)$ の lattice を

$$L_\alpha(\rho, \mathcal{O}) = \{f \in L(\rho, K) \mid f(Y_{Q,\alpha}) \subset V(\mathcal{O})\}$$

で定義する. $A_r = \frac{1}{p^r} \mathcal{O} / \mathcal{O}$, $A = A_\infty = K / \mathcal{O}$ とおき,

$$L_\alpha(\rho, A_r) = L_\alpha(\rho, \mathcal{O}) \otimes_{\mathcal{O}} A_r$$

とおく. これが L_r に相当するものである.

次に, $\Gamma_0(p^\alpha), \Gamma_1(p^\alpha)$ に相当するものを定義する.

$G(\widehat{\mathbb{Z}})$ の compact open subgroup U であって, 十分小さく, そのレベル⁴ は p と素なものを取り以下固定する. このとき, 固定してあった parabolic subgroup Q に対して, $\tilde{Q} := M^1 Q^+$ とおき,

$$U_0(p^\alpha) = \{h \in U \mid (h \pmod{p^\alpha}) \in \tilde{Q}(\mathbb{Z}/p^\alpha \mathbb{Z})\}$$

$$U_1(p^\alpha) = \{h \in U \mid (h \pmod{p^\alpha}) \in Q(\mathbb{Z}/p^\alpha \mathbb{Z})\}$$

とし,

$$\Gamma_i(p^\alpha) = G^1(\mathbb{Q}) \cap (U_i \times G^1(\mathbb{R})), i = 1, 2,$$

$$\Gamma = G^1(\mathbb{Q}) \cap (U \times G^1(\mathbb{R}))$$

とおく (U が “十分小さい” というのはこの Γ が捩れ点を持たないときをいう).

$\Gamma_i(p^\alpha) \subset G^1(\mathbb{Q}_p) \subset G^1(K)$ なので, $\Gamma_i(p^\alpha)$ は $L(\rho, K)$, $L_\alpha(\rho, A_r)$, ($r \geq 1$) 等に作用する.

さて, $L(\rho, K)$ は $\rho|_{Q'}$ から定まっていたが, M' の指標 $\chi : M' \rightarrow \mathcal{O}^\times$ を用いて, $L(\rho, K)$ の twist

$$L(\rho \otimes \chi, K) = \text{Ind}_{Q'}^{G^1}(\rho|_{Q'} \otimes \chi) \otimes_{\mathcal{O}} K$$

を考えることができる. これによって G^1 の表現としての $L(\rho, K)$ の weight を動かすことができる. Weight を動かす方向は parabolic subgroup Q に依存する. これは Hida family を “変形” する方向と対応する.

たとえば, $F = \mathbb{Q}$, $Q = \text{Borel}$ のとき, $M = T = \{\text{diag}(a, b, \nu a^{-1}, \nu b^{-1})\} \simeq \mathbb{G}_m^3$ (maximal torus),

$$M' = T \cap G^1 = \{\text{diag}(a, b, a^{-1}, b^{-1})\} \simeq \mathbb{G}_m^2$$

であり, 指標は

$$\delta_{m,n} : M' \rightarrow \mathbb{A}^1, \text{diag}(a, b, a^{-1}, b^{-1}) \mapsto a^m b^n, m, n \in \mathbb{Z}$$

の形にかける. いま, 1 節のところで登場した $V_{m,n}$ が $V_{m,n} = L(\delta_{m,n}, K)$ となっているとき, 別の $\delta_{m',n'}$ を持ってきて twist してやると, $V_{m+m',n+n'}$ を得る. たとえば, $(m', n') = (p^{k_1}(p-1), p^{k_2}(p-1))$, $k_1 \geq k_2 \geq 0$ とおくことで, 重さ $(m+3, n+3)$, $m > n$ の (p, Q) -ordinary

⁴ $U \supset \text{Ker}(G(\widehat{\mathbb{Z}}) \rightarrow G(\widehat{\mathbb{Z}}/N\widehat{\mathbb{Z}}))$ なる最小の N のこと.

classical Siegel modular forms を重さ $(m + p^{k_1}(p-1) + 3, n + p^{k_2}(p-1) + 3)$ の (p, Q) -ordinary classical Siegel modular forms に Hida family を通して p 進的変形をすることができる.

$$F = \mathbb{Q}, Q = \text{Siegel} \text{ のとき, } M = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0_2 \\ 0_2 & \nu^t A^{-1} \end{pmatrix} \right\}, \nu \in \mathbb{G}_m, A \in GL_2,$$

$$M' = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0_2 \\ 0_2 & {}^t A^{-1} \end{pmatrix} \right\}, A \in GL_2,$$

M' のアーベル化は $C'_M = M'/(M')^1 = \{\text{diag}(a, a, a^{-1}, a^{-1})\} \simeq \mathbb{G}_m$ であり, M' の指標は

$$\delta_k^1 : M' \longrightarrow A^1, \text{diag}(a, a, a^{-1}, a^{-1}) \mapsto a^k$$

の形にかける. いま, $L(\rho, K)$ の weight が (m, n) のとき, $\delta_m^1 = \delta_{m,m}$ だから, $L(\rho \otimes \delta_m^1, K)$ の weight は $(m+k, n+k)$ である.

$$F = \mathbb{Q}, Q = \text{Klingen} \text{ のとき, } M = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix} \right\}, ad - bc = \alpha\beta \in \mathbb{G}_m,$$

$$M' = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ 0 & 0 & \alpha^{-1} & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix} \right\}, ad - bc = 1.$$

M' のアーベル化は $C'_M = M'/(M')^1 = \{\text{diag}(\alpha, 1, \alpha^{-1}, 1)\} \simeq \mathbb{G}_m$ であり, M' の指標は

$$\delta_k^2 : M' \longrightarrow A^1, \text{diag}(\alpha, 1, \alpha^{-1}, 1) \mapsto \alpha^k$$

の形にかける. いま, $L(\rho, K)$ の weight が (m, n) のとき, $\delta_k^2 = \delta_{k,0}$ だから, $L(\rho \otimes \delta_k^2, K)$ の weight は $(m+k, n)$ である.

以上まとめると, weight を twist で動かす方向は次のようになる. ただし, 以下では (m, n) は固定された weight で k, k_1, k_2 等を twist で動かすことを意味する. これは $F = \mathbb{Q}, G = GSp_4$ の場合に, Hida family が weight space 内で動くことができる方向を示している.

$$\begin{cases} (m, n) \rightarrow (m + k_1, n + k_2) & , Q = \text{Borel} \text{ のとき} \\ (m, n) \rightarrow (m + k, n + k) & , Q = \text{Siegel} \text{ のとき} \\ (m, n) \rightarrow (m + k, n) & , Q = \text{Klingen} \text{ のとき} \end{cases}$$

2.1. p -semilocal Hecke algebra. 天下りな定義であるが, $\Gamma_1(p^r)$ を含む $\Gamma_0(p^r)$ の正規部分群 C に対して,

$$H_{p,r} = H_{p^r}(C) := \begin{cases} \otimes_{v|p} \mathcal{O}[\Gamma_0(p^r)/C][U_{1,v}, U_{2,v}] & (Q = \text{Borel}) \\ \otimes_{v|p} \mathcal{O}[\Gamma_0(p^r)/C][U_{1,v}] & (Q = \text{Siegel}) \\ \otimes_{v|p} \mathcal{O}[\Gamma_0(p^r)/C][U_{2,v}] & (Q = \text{Klingen}) \end{cases}$$

のことを p -semilocal Hecke algebra という. ただし, $U_{1,v} = C_{\mathcal{O}_v} \text{diag}(1, 1, \pi_v, \pi_v) C_{\mathcal{O}_v}$, $U_{2,v} = C_{\mathcal{O}_v} \text{diag}(1, \pi_v, \pi_v^2, \pi_v) C_{\mathcal{O}_v}$ とする (π_v は F_v の素元). ここで, $C_{\mathcal{O}_v}$ は C の $U_0(p^r) \cap G^1(\mathcal{O}_v)$ 内での v -adic completion.

$s \geq r \geq 1$ のとき, $H_{p,r}$ の $L_1(Y_{Q,s}, \rho \otimes \varepsilon\chi, A_r)$ への作用を $Y_{Q,s}$ を level 付き flag の moduli set と同一視することにより定義することができる. $s \gg r$ のとき, $L(\rho, A_r) := L_1(\rho \otimes \varepsilon\chi, A_r) = L_1(Y_{Q,s}, \rho \otimes \varepsilon\chi, A_r)$ なので, このとき, $H_{p,r}$ は $H^*(\Gamma_1(p^s), L(\rho \otimes \varepsilon\chi, A_r))$ に作用する.

$H_p := \varprojlim_r H_{p,r}$ のことを p -semilocal Hecke algebra という. H_p は

$$H^*(\Gamma_1(p^\infty), L(\rho \otimes \varepsilon\chi, A)) = \varprojlim_{\substack{s, r \\ s \gg r}} H^*(\Gamma_1(p^s), L(\rho \otimes \varepsilon\chi, A_r))$$

に作用する.

2.2. Hida group. $r \geq 1$ に対して,

$$H_r = \mathcal{R}_r \oplus_{Z_G(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})} Z_M(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}),$$

$$\mathcal{R}_r := Z_G(\mathbb{Q}) \backslash Z_G(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}) / \{z \in Z_G(\widehat{\mathbb{Z}}) \mid z \equiv 1 \pmod{p^r}\} Z_G(\mathbb{R})^+$$

とおく⁵. ただし, $\oplus_{Z_G(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})}$ は $Z_G(\mathbb{Z}_p) \subset Z_G(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ が誘導する準同型

$$\alpha : Z_G(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathcal{R}_r$$

と $Z_G \subset Z_M$ が誘導する準同型

$$\beta : Z_G(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}) \longrightarrow Z_M(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})$$

に対して定まる射 $z \mapsto (\alpha(z^{-1}), \beta(z))$ に関する amalgamated sum である. これはこの対応の行き先の元を同一視することによって定義される.

このとき,

$$H = \varprojlim_r H_r$$

を Hida group という. H は有限群 Φ と最大 pro- p subgroup $H(p)$ の直積に書ける. また global class field theory から, $\mathcal{R}$ の pro- p subgroup は

$$\mathcal{R}(p) \simeq \varprojlim_r (\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p)^\times(p) / \overline{\mathcal{O}_{F,p^r}^\times}(p) \simeq \mathbb{Z}_p^{1+\delta_F}, \quad \mathcal{O}_{F,p^r}^\times = \{a \in \mathcal{O}_F^\times \mid a \equiv 1 \pmod{p^r}\}$$

となるから,

$$H(p) \simeq \mathbb{Z}_p^{1+\delta_F} \times Z_{M'}(\mathbb{Z}_p)(p)$$

とかける. ただし, δ_F は F の Leopoldt defect で 0 であると期待されている ($F/\mathbb{Q}$ がアーベルなら 0 である). H の完備群環を $\Lambda = \mathcal{O}[[H]]$ とおくと,

$$\Lambda = \mathcal{O}[[H(p)]][\Phi]$$

となる. $\Lambda(p) = \mathcal{O}[[H(p)]] = \mathcal{O}[[X_1, \dots, X_{1+\delta_F}, Y_1, \dots, Y_r]]$, $r = \text{rk}(C_{M'})$ とおき, Λ または $\Lambda(p)$ のことを Hida-Iwasawa algebra という. ただし, $r = \text{rk}(C_{M'}) = \text{rk}(Z_{M'})$ は $C_{M'}$ または $Z_{M'}$ に含まれる split torus の数である.

⁵講演では Z_M を誤って $C_M = M/M^1$ と書いた. 自然な射 $Z_M \longrightarrow C_M = M/[M, M]$ は Q が Borel のときは, 同型であり, それ以外のときは 2:1 の同種射となる.

定義 1(arithmtic primes) 連続指標 $\theta : H \longrightarrow \mathcal{O}^\times$ が arithmetic character であるとは, ある H の開部分群 U が存在して, $\theta|_U$ が $Z_G \times Z_M$ の代数的指標から来るときをいう. θ は連続環準同型 $\Lambda \longrightarrow \mathcal{O}$ に拡張できるのでそれも θ とかき, その核を $\mathcal{P}_\theta = \text{Ker}(\Lambda \xrightarrow{\theta} \mathcal{O})$ であらわす.

代数的指標 $\rho : C_M \longrightarrow \mathcal{O}^\times$ に対して, $i : Z_M \longrightarrow C_M$ との合成によって, H 上の指標 θ_ρ を構成することができる.

例えば, $F = \mathbb{Q}$, $Q = \text{Borel}$ のときは, $\delta_{\mathbb{Q}} = 0$, $\mathcal{R} = \text{Gal}(\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})/\mathbb{Q}_p)$, $Z_{M'}(\mathbb{Z})(p) = \{\text{diag}(a, b, a^{-1}, b^{-1}) \mid a, b \in 1 + p\mathbb{Z}_p\} \simeq \mathbb{Z}_p^2$ だから, 連続指標

$$\theta : H \longrightarrow \mathcal{O}^\times$$

は ε は有限指標, $\exp(l \log \chi_p)$, $l \in \mathbb{Z}_p$, (χ_p は p 進円分指標) θ_{k_1, k_2} の積でかける. ただし, θ_{k_1, k_2} は $Z_{M'}(\mathbb{Z})(p)$ の位相的生成元 $\gamma_i, i = 1, 2$ を $\mathcal{O}^\times$ の pro- p 部分に含まれる元の $k_i \in \mathbb{Z}_p$ 乗したものにそれぞれを送ることによって定義される射である. これが arithmetic character であるための必要十分条件は $l, k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ である.

$Z_{M'}(\mathbb{Z})(p)$ の位相的生成元は

$$\text{diag}(1 + p, 1, (1 + p)^{-1}, 1), \text{diag}(1, 1 + p, 1, (1 + p)^{-1})$$

なので,

$$\text{diag}(1 + p, 1, (1 + p)^{-1}, 1) \mapsto (1 + p)^{k_1}, \text{diag}(1, 1 + p, 1, (1 + p)^{-1}) \mapsto (1 + p)^{k_2}$$

に対応する arithmetic character を考えることが多い.

2.3. Hida's idempotent. 本来の定義はやや複雑なので大体どのようなものかを大雑把に述べる. $d_1 = \text{diag}(1, 1, p, p)$, $d_2 = \text{diag}(1, p, p^2, p)$, $d_3 = d_1 d_2$ とおき, 総実体 F の類数を h_F と記す. . このとき $Q = \text{Borel}$ なら $d_3^{2h_F}$, $Q = \text{Siegel}$ なら $d_1^{2h_F}$, $Q = \text{Klingen}$ なら $d_2^{2h_F}$ に mod $U_0(p^r)$ で近い $G(\mathbb{Q})$ の元 ξ_Q が存在する (強近似定理の帰結). そこで,

$$T_Q = [\Gamma_i(p^r) \xi_Q \Gamma_i(p^r)], \quad i = 0, 1$$

とおき,

$$e = e_Q = \lim_{n \rightarrow \infty} T_Q^n \in H_p$$

を Hida's idempotent という. T_Q が作用する有限生成 $\mathcal{O}$ 加群 M に対して, $e \in \text{End}_{\mathcal{O}}(M)$ であり, e は idempotent となる (cf. [3]). そこで, $M = H^*(\Gamma_i(p^r), L)$ (L は適当な有限生成 $\mathcal{O}$ 加群) に対して,

$$H_{Q-\text{ord}}^*(\Gamma_i(p^r), L) := e H^*(\Gamma_i(p^r), L)$$

と表すことにする. 定義から, $H_{Q-\text{ord}}^*(\Gamma_i(p^r), L)$ は $H^*(\Gamma_i(p^r), L)$ の元であって, その T_Q 作用の固有値が p -adic unit となるようなものの全体からなる. $H_{Q-\text{ord}}^*(\Gamma_i(p^r), L)$ の元を (p, Q) -ordinary cohomology class ということにする. これは, 後述する (p, Q) -ordinarity と合致する (定義 3 を参照).

2.4. **Level の control と weight の independence.** 有限指標 $\varepsilon : M'(\mathbb{Z}_p) \longrightarrow \mathcal{O}^\times$ であって, $M'(\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z})$ を経由するような最小の α をとり, p^α を ε の level と呼ぶことにする.

定理 1 (Control of levels and independence of the weight) $d = [F : \mathbb{Q}]$ とおく. $\chi, \varepsilon : M'(\mathbb{Z}_p) \longrightarrow \mathcal{O}^\times$ を連続指標とし, χ はある p -adic open 上で M' の代数的指標からきていてとし, $\chi \equiv 1 \pmod{\pi}$ とする. ε は level p^α の有限指標とする. このとき, p -semilocal Hecke algebra 加群としての射⁶

$$H_{Q-\text{ord}}^{3d}(\Gamma_0(p^\alpha), L_\alpha(\rho \otimes \varepsilon\chi, A)) \longrightarrow H_{Q-\text{ord}}^{3d}(\Gamma_1(p^\infty), L_\alpha(\rho, A))[\omega_{\varepsilon\chi}]$$

であって, kernel と cokernel が有限となるものが存在する (weak control). さらに, 有理素数の成すある有限集合 $S_{U,\rho}$ ⁷ が存在して, $p \notin S_{U,\rho}$ ならば, この射は同型である (exact control). ここで, $3d$ は $G = \text{Res}_{F/\mathbb{Q}}(GSp_4/F)$ に付随する志村多様体の次元である. RHS は $Z_{M'}(\mathbb{Z}_p)$ の作用が $\omega_\rho \times (\varepsilon\chi \circ i)$ を通して作用するような $H^{3d}(\Gamma_1(p^\infty), L_\alpha(\rho, A))$ の最大 (Hecke) 部分加群である (ただし, 自然な全射は $i : Z_{M'} \longrightarrow C_{M'} = M'/(M')^1$ は Borel のときは同型で, それ以外のときは 2:1 の同種.).

証明. 整数 $r \geq \alpha$ に対して, evaluation map

$$L_\alpha(\rho \otimes \varepsilon\chi, A_r) \xrightarrow{\psi_r} V(\varepsilon\chi) \otimes A_r, f \mapsto f(1)$$

を考える. この射は全射であり, $f(1) \in V(\varepsilon\chi)$ に対して, $\Gamma_0(p^\alpha) \ni \gamma$ を $\gamma \cdot f(1) := f(\gamma^{-1})$ と作用させることで, ψ_r は $\Gamma_0(p^\alpha)$ 加群としての全射であることがわかる.

$s \geq r \geq \alpha$ に対して $Y_{Q,\alpha}(\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}) := \pi^{-1}(X_{Q,\alpha}(\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}))$ とおく. さて,

$$L_\alpha(Y_{Q,\alpha}(\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}), \rho \otimes \varepsilon\chi, A_r) := \{f \in L_\alpha(\rho \otimes \varepsilon\chi, A_r) \mid f \text{ は } Y_{Q,\alpha}(\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}) \text{ を経由} \}$$

とおくと, $L_\alpha(\rho \otimes \varepsilon\chi, A_r)$ の有限性と

$$L_\alpha(\rho \otimes \varepsilon\chi, A_r) = \varinjlim_{\substack{s \\ s \geq r}} L_\alpha(Y_{Q,\alpha}(\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}), \rho \otimes \varepsilon\chi, A_r)$$

から, r に対してある $s \geq r$ が存在して,

$$L_\alpha(\rho \otimes \varepsilon\chi, A_r) = L_\alpha(Y_{Q,\alpha}(\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}), \rho \otimes \varepsilon\chi, A_r)$$

となる. 以下このような s, r の関係を $s \gg r$ と表すことにする. このとき, RHS には $\Gamma_0(p^s)$ が作用することに注意すると, $\Gamma_0(p^s)$ の完全列

$$0 \longrightarrow \text{Ker}(\psi_r) \longrightarrow L_\alpha(Y_{Q,\alpha}(\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}), \rho \otimes \varepsilon\chi, A_r) \xrightarrow{\psi_r} V(\varepsilon\chi) \otimes A_r \longrightarrow 0$$

を得る. これを $\Gamma_1(p^s) (\subset \Gamma_0(p^s))$ 加群とみて, 群コホモロジーをとると,

$$\cdots \longrightarrow H^{3d}(\Gamma_1(p^s), L_\alpha(\rho \otimes \varepsilon\chi, A_r)) \xrightarrow{\psi_r} H^{3d}(\Gamma_1(p^s), V(\varepsilon\chi) \otimes A_r) \longrightarrow \cdots$$

⁶これは後述する universal Hecke algebra としての射にもなっている.

⁷ $S_{U,\rho}$ については後述の注意 1 を参照.

を得る. ここで, 群コホモロジーの元を cocycle 表示して具体的に作用を計算することで, $\text{Ker}(\psi_r)$ や $\text{coker}(\psi_r)$ が Hida's idempotent $e = e_Q$ で annihilate されることが簡単にわかる. よって, Hecke 加群の同型

$$(*) \quad H_{Q\text{-ord}}^{3d}(\Gamma_1(p^s), L_\alpha(\rho \otimes \varepsilon\chi, A_r)) \xrightarrow{\sim} H_{Q\text{-ord}}^{3d}(\Gamma_1(p^s), V(\varepsilon\chi) \otimes A_r)$$

を得る. さらに, $\Gamma_1(p^s)$ 加群としては $V(\varepsilon\chi) \otimes A_r = V \otimes A_r$ なので,

$$H_{Q\text{-ord}}^{3d}(\Gamma_1(p^s), L_\alpha(\rho \otimes \varepsilon\chi, A_r)) \xrightarrow{\sim} H_{Q\text{-ord}}^{3d}(\Gamma_1(p^s), V \otimes A_r).$$

次に, $r \geq \alpha$ と, 上記の $\rho \otimes_{\mathcal{O}} A_r$ に対して, $M^1(\mathbb{Z}_p)$ から $U_0(p) \cap G^1(\mathbb{Z}_p)$ への smooth induction を

$$\begin{aligned} C_\alpha(\rho, A_r) &:= \text{Ind}_{M^1(\mathbb{Z}_p)}^{U_0(p^\alpha) \cap G^1(\mathbb{Z}_p)}(\rho|_{M^1} \otimes_{\mathcal{O}} A_r) \\ &= \left\{ f : Y_{Q,\alpha} \longrightarrow V \otimes_{\mathcal{O}} A_r \left| \begin{array}{l} f \text{ は locally constant} \\ f(mx) = \rho^{-1}(m)f(x) \\ \text{for } (m, x) \in M^1(\mathbb{Z}_p) \times Y_{Q,\alpha} \end{array} \right. \right\} \end{aligned}$$

とおき, $C_\alpha(\rho, A) := \varinjlim_{r \geq \alpha} C_\alpha(\rho, A_r)$ とおく.

$s \geq r$ に対して, $C_\alpha(\rho, A_r)$ の元であって, $M'(\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z})$ ($M' = M \cap G^1 \supset M^1$) を経由するもの全体を $C_\alpha(M'(\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}), \rho, A_r)$ で表す. このとき, $\Gamma_0(p^r)$ 加群の完全列

$$0 \longrightarrow \text{Ker}(\phi_r) \longrightarrow C_\alpha(\rho, A_r) \xrightarrow{\phi_r = \text{rest}} C_\alpha(M'(\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}), \rho, A_r) = \text{Ind}_{\Gamma_1(p^r)}^{\Gamma_0(p^r)} \rho \otimes_{\mathcal{O}} A_r \longrightarrow 0$$

を得る. これを $\Gamma_0(p^s)$, $s \geq r$ 加群の完全列とみて群コホモロジーをとると, Shapiro の補題により,

$$\cdots \longrightarrow H^{3d}(\Gamma_0(p^s), C_\alpha(\rho, A_r)) \xrightarrow{\phi_r} H^{3d}(\Gamma_0(p^s), \text{Ind}_{\Gamma_1(p^r)}^{\Gamma_0(p^r)} \rho \otimes_{\mathcal{O}} A_r) = H^{3d}(\Gamma_1(p^s), V \otimes A_r) \longrightarrow \cdots$$

を得る. ここで前と同様の議論で ϕ_r の Kernel, cokernel は $e = e_Q$ で annihilate されるので, Hecke 加群の同型

$$(**) \quad H^{3d}(\Gamma_0(p^s), C_\alpha(\rho, A_r)) \xrightarrow{\sim} H^{3d}(\Gamma_1(p^s), V \otimes A_r)$$

を得る.

さて, ここで有限生成 A_r 加群 L_r に対して, 制限射

$$\text{Res} : H^*(\Gamma_i(p^\alpha), L_r) \longrightarrow H^*(\Gamma_i(p^r), L_r), \quad i = 0, 1, \quad r \geq \alpha$$

の kernel, cokernel は $e = e_Q$ で annihilate されることに注意すると,

$$\begin{aligned} H_{Q\text{-ord}}^{3d}(\Gamma_0(p^\alpha), C_\alpha(\rho, A_r)) &\simeq H_{Q\text{-ord}}^{3d}(\Gamma_0(p^s), C_\alpha(\rho, A_r)) \\ &\simeq H_{Q\text{-ord}}^{3d}(\Gamma_0(p^\alpha), C_\alpha(M'(\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}), \rho, A_r)) \\ &= H_{Q\text{-ord}}^{3d}(\Gamma_1(p^\alpha), V \otimes A_r) \\ &\simeq H_{Q\text{-ord}}^{3d}(\Gamma_1(p^s), V \otimes A_r) \\ &\simeq H_{Q\text{-ord}}^{3d}(\Gamma_1(p^s), L_\alpha(\rho \otimes \varepsilon\chi, A_r)) \end{aligned}$$

この同型の $\varinjlim_{\substack{s,r \\ s > r}} \rightarrow$ をとることで, Hecke 加群の同型

$$(* **) \quad H_{Q-\text{ord}}^{3d}(\Gamma_0(p^\alpha), C_\alpha(\rho, A)) \simeq H_{Q-\text{ord}}^{3d}(\Gamma_1(p^\infty), L_\alpha(\rho \otimes \varepsilon_\chi, A))$$

を得る. ここで注意したいのは RHS は上の下から 2 段目の同型をみると α や ε_χ に寄らないことがわかる. よって, ε_χ の捻りで ρ が ρ' に移るとき, ρ' から初めて同様に RHS のようなものを構成しても同じものが出てくることに注意. ρ に依存しているように見えるが捻りの自由度を含んでいるので不変的な存在であるといえる.

さて, この同型を用いると, 包含射 $L_\alpha(\rho, A) \subset C_\alpha(\rho, A)$ より, 射

$$\iota : H_{Q-\text{ord}}^{3d}(\Gamma_0(p^\alpha), L_\alpha(\rho, A)) \longrightarrow H_{Q-\text{ord}}^{3d}(\Gamma_0(p^\alpha), C_\alpha(\rho, A)) \simeq H_{Q-\text{ord}}^{3d}(\Gamma_1(p^\infty), L_\alpha(\rho \otimes \varepsilon_\chi, A))$$

を得る. 射 ι の像は $H_{Q-\text{ord}}^{3d}(\Gamma_1(p^\infty), L_\alpha(\rho \otimes \varepsilon_\chi, A))[\omega_{\varepsilon_\chi}]$ に入ることがわかるので, 結局

$$\iota : H_{Q-\text{ord}}^{3d}(\Gamma_0(p^\alpha), L_\alpha(\rho, A)) \longrightarrow H_{Q-\text{ord}}^{3d}(\Gamma_1(p^\infty), L_\alpha(\rho \otimes \varepsilon_\chi, A))[\omega_{\varepsilon_\chi}]$$

を得る.

後は Hida の Lemma と呼ばれる, この手の議論によく使われる補題 (cf. Lemma 5.1 [2]) により, 与えられた条件から, ι が isogeny (kernel, cokernel が有限) であることがわかる. また Lemma 5.1[2] を修正することで, $p \notin S_{U,\rho}$ の下で同型であることもわかる. この Lemma を適用する際, ρ が regular であることは本質的であり, 中間次数と 0 次以外のコホモロジーが消滅することが重要になっている. $\square$

注意 1. 上記定理中の素数の有限集合 $S_{U,\rho}$ は次のものからなる. ただし, $F = \mathbb{Q}$ のときは 2 番目の条件は不要.

- $\prod_{i=1}^{3d} \#H^i(\Gamma, L(\rho_0, \mathcal{O}_0))_{\text{torsion}}$ を割る素数 (Γ は p.4 の中央にあるもの). ただし, ρ_0 はある Dedekind domain $\mathcal{O}_0/\mathbb{Z}$ 上の代数的既約表現で, $\mathcal{O}_0$ の p 進完備化が $\mathcal{O}$, $\rho = \rho_0 \otimes_{\mathcal{O}_0} \mathcal{O}$ となっているものとする.
- $(\mathcal{O}_F \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O})^\times$ の捩れ元の位数を割る p

注意 2. Control theorem より, $p \notin S_{U,\rho}$ ならば, ρ からスタートして, その dominancy を保つ任意の twist $\rho' = \rho \otimes \varepsilon_\chi$ に付随する係数に値をとる cohomology classes も補完していることがわかる. このことから, “大きな” Hecke 加群 $H_{Q-\text{ord}}^{3d}(\Gamma_1(p^\infty), L_\alpha(\rho, A))$ が (p, Q) -ordinary な cohomology classes 全体をほぼすべて束ねた普遍的な存在であることがわかる. 後半ではこのコホモロジーの parabolic part (cuspidal part に対応していると予想されている部分) の control theorem を示し, Hida family を構成する.

3. SHIMURA VARIETIES FOR GSp_4/F

記号は前節のものをを使う. $r \geq 1$ に対して,

$$S_r(U) = G(\mathbb{Q}) \backslash G(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}) / U_1(p^r) \times U(2)$$

を G に付随する level $U_1(p^r)$ の志村多様体とする. ただし, $U(2)$ は $G(\mathbb{R})$ の maximal compact subgroup である.

志村多様体の parabolic cohomology (ここでは betti cohomology を考えている) に関する control theorem を群コホモロジーにそれに帰着するために強近似定理を $(G(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}), U_0(p^r))$ に適用することで,

$$S_r(U) = \coprod_{t \in R} \text{Ind}_{C_{M'}(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})\nu(\Gamma_t \bmod p^r)}^{C_M(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})} S_{\Gamma_{1,t}(p^r)}, \quad S_{\Gamma_{1,t}(p^r)} := \Gamma_{1,t}(p^r) \backslash G^1(\mathbb{R}) / U(2)$$

と分解する. ただし, R は $G(\mathbb{A}_f)$ の有限部分集合で, (固定していた) U の level と p を割る素点以外の成分は 1 であって, $\nu(R)$ は $\text{Cl}_U^+ := F^\times \backslash \mathbb{A}_F^\times / \nu(U) \times (F_\infty^\times)^+$ の完全代表系を与えるものである. 有限集合 R は r には依らない有限集合である. また, $t \in R$ に対して,

$$\Gamma_t = G(\mathbb{Q}) \cap (tUt^{-1} \times G^1(\mathbb{R})),$$

$$\Gamma_{i,t}(p^r) = G^1(\mathbb{Q}) \cap (tU_i(p^r)t^{-1} \times G^1(\mathbb{R})), \quad i = 0, 1$$

とおいた. これより, $S_r(U)$ 上の局所系 $\mathcal{L}$ に対して,

$$H^*(S_r(U), \mathcal{L}) = \bigoplus_{t \in R} \text{Ind}_{C_{M'}(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})\nu(\Gamma_t \bmod p^r)}^{C_M(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})} H^*(S_{\Gamma_{1,t}(p^r)}, \mathcal{L}|_{S_{\Gamma_{1,t}(p^r)}})$$

という分解を得る.

さて, $X = S_{\Gamma_{1,t}(p^r)}$ の Borel-Serre compact 化を $\overline{X}^{\text{BS}}$ とし⁸, その boundary を $\partial X = \overline{X}^{\text{BS}} \setminus X$ とおく. これは 3 つある parabolic subgroups のどれかと共役な G の群を idenx とする manifold の和であって, 各成分は大体 modular curves 上のファイバーが nil-manifold になっているような fiber bundle である. ∂X の係数付き cohomology は Serre のスペクトル系列を用いて計算可能であり, parabolic subgroup の Levi factor M に $\Gamma_{1,t}(p^r)$ を制限して得られる数論的群に関する群コホモロジーの計算に帰着される.

前節と同様の手法で, これらの群の群コホモロジーに関する control theorem を導くことを [7] の 4,5 節で費やしている. しかし, 計算がかなり面倒である. 結果的には regular weight をもつ ρ に対しては weak control theorem が得られ, さらに, p は中間次数と 0 次以外のコホモロジーの捩れ元の位数を割らないと仮定すれば exact control theorem が得られる.

4. PARABOLIC COHOMOLOGY の CONTROL

特異コホモロジー H^* の parabolic cohomology $H_!^*$ を compact support 付きコホモロジー H_c^* から H^* への像と決める: $H_!^* = \text{Im}(H_c^* \rightarrow H^*)$. $L(\rho, A) := L_1(\rho, \mathcal{O}) \otimes A$ に付随する $S_r(U)$ 上の局所系を $\mathcal{L}(\rho, A)$ とする. 各 $r \geq 1$ に対して,

$$V_{r,\rho} = eH^{3d}(S_r(U), \mathcal{L}(\rho, A)), \quad V_{r,\rho,!} = eH_!^{3d}(S_r(U), \mathcal{L}(\rho, A)), \quad V_{r,\rho,\partial} = eH^{3d}(\partial S_r(U), \mathcal{L}(\rho, A)),$$

$$V_\rho = \varinjlim_r V_{r,\rho}, \quad V_{\rho,!} = \varinjlim_r V_{r,\rho,!}, \quad V_{\rho,\partial} = \varinjlim_r V_{r,\rho,\partial}$$

とおく.

⁸これは σ -compact な manifold の成す圏での compact 化なので一般には複素構造を持たない.

固定していた $G(\widehat{\mathbb{Z}})$ の open compact subgroup U の level を N とする. $G(\mathbb{A}_f)^{(pN)}$ によって, pN を割る素点での成分以外は 1 の元全体を表す. さて,

$$h_r^N := \left\langle \begin{array}{ll} [U_1(p^r)hU_1(p^r)], & h \in G(\mathbb{A}_f)^{(pN)} \cap M_4(\widehat{\mathbb{Z}}) \\ [U_1(p^r)h_pU_1(p^r)], & h_p \in D_p \\ [U_1(p^r)hU_1(p^r)], & h \in Z_M(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}) \\ [U_1(p^r)hU_1(p^r)], & h \in \mathcal{R}_r \end{array} \right\rangle_{\mathcal{O}}$$

を tame level N の Hecke algebra/ $\mathcal{O}$ とする. これは可換 $\mathcal{O}$ 代数である. ここで, semigroup D_p は定義しないが, $\mathcal{O}[U_1(p^r)D_pU_1(p^r)]$ は 2 節で登場した p -semilocal Hecke algebra H_p と一致する. h_r^N の生成系の上から 3 つ目は $G = GL_2$ でいうところの diamond 作用素である. 4 つ目の作用は p -adic cyclotomic character による作用と理解することができる.

さて,

$$h = h^N = \varprojlim_r h_r^N$$

とおくと, これは $V_\rho, V_{\rho,!}, V_{\rho,\partial}$ の Pontryagin dual $V_\rho^\vee, V_{\rho,!}^\vee, V_{\rho,\partial}^\vee$ に作用する. また,

$$\Lambda \longrightarrow h, H \ni (z, m) \mapsto [U_1(p^r)zmU_1(p^r)]$$

により, h は Λ 代数となる.

定理 2 (parabolic cohomology の control) $\rho = \rho_0 \otimes_{\mathcal{O}_0} \mathcal{O}$ は regular とする. このとき, 任意の arithmetic character $\theta = \phi \times \omega_{\varepsilon\chi} : H \longrightarrow \mathcal{O}^\times$ で ε が level p^r に対して, 自然な h 加群の射

$$V_{r,\rho \otimes \varepsilon\chi,!}(\phi) \longrightarrow V_{\rho,!}[\mathcal{P}_\theta] = V_{\rho,!}/\mathcal{P}_\theta V_{\rho,!}$$

は isogeny である (weak control). さらに, ある有理素数の有限集合 $S'_{U,\rho}$ が存在して, $p \notin S'_{U,\rho}$ ならば, 上の射は同型となる (exact control).

証明.

$$LHS = \bigoplus_{t \in R} \text{Ind}_{C_{M'}(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})\nu(\Gamma_t \bmod p^r)}^{C_M(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})} H_{!}^{3d}(S_{\Gamma_{1,t}(p^r)}, \mathcal{L}(\rho \otimes \varepsilon\chi, A)|_{S_{\Gamma_{1,t}(p^r)}})(\phi)$$

なので, 各 t ごとに完全列

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow eH_{!}^{3d}(S_{\Gamma_{1,t}(p^r)}, \mathcal{L}(\rho \otimes \varepsilon\chi, A)|_{S_{\Gamma_{1,t}(p^r)}})(\phi) &\longrightarrow H_{Q\text{-ord}}^{3d}(S_{\Gamma_{1,t}(p^r)}, \mathcal{L}(\rho \otimes \varepsilon\chi, A)|_{S_{\Gamma_{1,t}(p^r)}})(\phi) \\ &\longrightarrow H_{Q\text{-ord}}^{3d}(\partial S_{\Gamma_{1,t}(p^r)}, \mathcal{L}(\rho \otimes \varepsilon\chi, A)|_{S_{\Gamma_{1,t}(p^r)}})(\phi) \end{aligned}$$

を見ると, 中央のコホモロジーは

$$H_{Q\text{-ord}}^{3d}(S_{\Gamma_{1,t}(p^r)}, \mathcal{L}(\rho \otimes \varepsilon\chi, A)|_{S_{\Gamma_{1,t}(p^r)}})(\phi) = H_{Q\text{-ord}}^{3d}(\Gamma_{1,t}(p^r), L(\rho \otimes \varepsilon\chi, A))(\phi)$$

なので, この $\varprojlim_r$ をとって, 定理 1 の control theorem を適用し, さらに boundary cohomology を control すれば定理の主張が得られる. adelic Hecke algebra h の作用は群コホモロジーに移ると, 2.1 節で定義した p -semilocal Hecke algebra H_p の作用に通常の Hecke 作用素を加えた algebra の作用と一致することに注意. boundary cohomology の control は [7] の 4,5 節で与えられているが複雑なのでここでは述べない.

上記定理中の素数の有限集合 $S'_{U,\rho}$ は次のものからなる.

• 定理 1 で登場した $S_{U,\rho}$ に含まれる有理素数.

• $\prod_{t \in R} \prod_{i=1}^{3d} \#H^i(\partial S_{\Gamma_t}, L(\rho_0, \mathcal{O}_0))_{\text{torsion}}$ を割る素数 (Γ_t や R は p.10 にあるもの). ただし, ρ_0 はある Dedekind domain $\mathcal{O}_0/\mathbb{Z}$ 上の代数的既約表現で, $\mathcal{O}_0$ の p 進完備化が $\mathcal{O}$, $\rho = \rho_0 \otimes_{\mathcal{O}_0} \mathcal{O}$ となっているものとする.

$F = Q$ のときは, $S'_{U,\rho} = S_{U,\rho}$ となる.

□

定理 3. ρ が regular ならば, $V_{\rho,!}^{\vee}$ は有限生成 Λ 加群であり, さらに, $p \notin S'_{U,\rho} \cup S'_{U,\rho^{\vee}}$ ならば, 自由 Λ 加群でもある.

証明. 前定理の arithmetic prime θ をとり, Λ の極大イデアル m をとると, 核が有限な全射

$$V_{\rho,!}^{\vee}/mV_{\rho,!}^{\vee} \simeq (V_{\rho,!}^{\vee}/\mathcal{P}_{\theta})/(mV_{\rho,!}^{\vee}/\mathcal{P}_{\theta}) \longrightarrow V_{r,\rho \otimes \varepsilon \chi,!}^{\vee}(\phi) \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}/\pi \mathcal{O}$$

を得る. 右辺は明らかに有限集合なので, 左辺もそう. よって, 位相的中山の補題により, $V_{\rho,!}^{\vee}$ は Λ 上有限生成である.

一方, exact control theorem が成立する arithmetic primes の成す weight space $\mathcal{X} = \text{Hom}_{\text{conti}}(\Lambda, \mathcal{O})$ の部分集合 $\{\theta_i\}_i$ であって, 対応する arithmetic primes の集合 $\{\mathcal{P}_{\theta_i}\}_i$ が $\text{Spec} \Lambda$ の中で Zariski dense になっているものが存在する. そのような arithmetic prime に対応する arithmetic character を $\theta = \omega \times (\varepsilon \chi \circ i)$ (ω は ρ の中心指標) とし, ε の level を p^r とする.

このとき, 完全列

$$0 \longrightarrow L(\rho \otimes \varepsilon \chi, \mathcal{O}) \longrightarrow L(\rho \otimes \varepsilon \chi, K) \longrightarrow L(\rho \otimes \varepsilon \chi, A) \longrightarrow 0$$

を考え,

$$eH_c^{3d}(S_{\Gamma_{1,t}(p^r)}, \mathcal{L}(\rho \otimes \varepsilon \chi, K)) \longrightarrow eH_c^{3d}(S_{\Gamma_{1,t}(p^r)}, \mathcal{L}(\rho \otimes \varepsilon \chi, A)) \longrightarrow eH_c^{3d+1}(S_{\Gamma_{1,t}(p^r)}, \mathcal{L}(\rho \otimes \varepsilon \chi, \mathcal{O}))$$

を得る. ここで, ρ は regular なのでその反傾表現 $\rho^{\vee}$ も regular⁹, したがって一番右端のコホモロジーの Potryagin dual¹⁰ をとると, $\rho^{\vee}$ が regular であることから,

$$eH^{3d-1}(S_{\Gamma_{1,t}(p^r)}, \mathcal{L}(\rho^{\vee} \otimes (\varepsilon \chi)^{\vee}, A)) = 0$$

よって, $eH_c^{3d}(S_{\Gamma_{1,t}(p^r)}, \mathcal{L}(\rho \otimes \varepsilon \chi, A))$ の元は p -divisible なので,

$$eH_c^{3d}(S_{\Gamma_{1,t}(p^r)}, \mathcal{L}(\rho \otimes \varepsilon \chi, A))^{\vee} = eH^{3d}(S_{\Gamma_{1,t}(p^r)}, \mathcal{L}(\rho^{\vee} \otimes (\varepsilon \chi)^{\vee}, \mathcal{O}))$$

は自由 $\mathcal{O}$ 加群.

一方, 全射 $H_c^* \longrightarrow H_!^*$ より, 単射 $(eH_!^*)^{\vee} \hookrightarrow (H_c^*)^{\vee} = (H^*)^{\vee}$ があるから, $V_{r,\rho \otimes \varepsilon \chi,!}^{\vee}$ も自由 $\mathcal{O}$ 加群. よって, p に対する仮定から, $V_{\rho,!}^{\vee}$ と $V_{\rho,!}$ に対する exact control theorem が成り立つので, $V_{\rho,!}$ の Λ -torsion ideal の生成元 $f_1, \dots, f_r \in \Lambda$ たちは, dense に多くの $\mathcal{P}_{\theta}$ で特殊化すると消える. 従って, $f_i = 0$ なので, $V_{\rho,!}$ は Λ -torsion free. □

⁹ $\text{wt}(\rho) = (a, b, ; c)$ のとき, $\text{wt}(\rho^{\vee}) = (a, b, ; -c)$ だから.

¹⁰ $H^i(X, L(\rho, \mathcal{O})) \times H_c^{3d-i}(X, L(\rho^{\vee}, A)) \longrightarrow A$ なる perfect pairing が存在する (ことを証明する).

5. A FAMILY OF EIGENSYSTEMS

定義 2. h を 4 節の Hecke algebra とする. J を $\Lambda(p)$ 上有限平坦な整域とする. このとき, Λ 代数としての射 $\lambda : h \longrightarrow J$ を a family of Q -nearly ordinay Siegel-Hilbert Hecke eigensystems と呼ぶことにする.

定義 3. π を $G(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}) = GSp_4(\mathbb{A}_F)$ の既約 cuspidal 保型表現で, level $U \subset G(\widehat{\mathbb{Z}})$, 無限成分が regular cohomological weight ρ_{π} をもつ discrete series と非自明な共通成分をもつとする. π に付随する eigensystems を $\lambda_{\pi} : h_{U,\rho} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$ とし, 任意の $v|p$ に対し, $v \nmid \text{level}(\pi)$ とする. このとき, π が (p, Q) -ordinary であるとは,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{任意の } v|p \text{ に対して, } \text{ord}_p(\lambda_{\pi}(U_{1,\pi_v})) = 0 \text{ かつ } \text{ord}_p(\lambda_{\pi}(U_{2,\pi_v})) = 0 & (Q = \text{Borel のとき}) \\ \text{任意の } v|p \text{ に対して, } \text{ord}_p(\lambda_{\pi}(U_{1,\pi_v})) = 0 & (Q = \text{Siegel のとき}) \\ \text{任意の } v|p \text{ に対して, } \text{ord}_p(\lambda_{\pi}(U_{2,\pi_v})) = 0 & (Q = \text{Klingen のとき}) \end{array} \right.$$

が成り立つときをいう. ただし, U_{1,π_v} は $\text{diag}(1, 1, \pi_v, \pi_v)$ に U_{2,π_v} は $\text{diag}(1, \pi_v, \pi_v^2, \pi_v)$ に関する Hecke operator.

定理 4. π を上の定義 3 の保型表現で (p, Q) -ordinary とする. π に付随する Hecke eigensystems λ_{π} の像を含むように $\mathcal{O}$ を十分大きくとる. このとき, $p \notin S'_{U,\rho_{\pi}} \cup S'_{U,\rho_{\pi}^{\vee}}$ ならば, eigensystems λ_{π} を通る a family of (p, Q) -nearly ordinay Siegel-Hilbert Hecke eigensystems $\lambda : h \longrightarrow J$ が存在して¹¹, ρ_{π} の dominancy を保つ任意の指標 $\varepsilon_{\chi} : C_{M'} \longrightarrow \mathcal{O}$, (ε の level は p^r とする) による twists $\rho' = \rho_{\pi} \otimes \varepsilon_{\chi}$ 対し¹², h の ρ' での特殊化はある $G(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}) = GSp_4(\mathbb{A}_F)$ の既約 cuspidal 保型表現 π' で, level $U_1(p^r) \subset G(\widehat{\mathbb{Z}})$, 無限成分が regular cohomological weight ρ' をもつ discrete series と非自明な共通成分をもつとするものに対応する Hecke eigensystems $\lambda_{\pi'}$ になっている.

証明. $V_{\rho,!}^{\vee}$ は h 加群なので, $J' = \text{Im}(h \longrightarrow \text{End}_{\Lambda}(V_{\rho,!}^{\vee}))$ とおくと, p が上記の条件を満たす時, $V_{\rho,!}^{\vee}$ は有限生成自由 Λ 加群なので, J' は Λ 上 finite flat. $\mathcal{P}_{\theta_{\rho}}$ が属する $\text{Spec } \Lambda = \bigcup_{\mathfrak{p}} \text{Spec } \Lambda(p)$ の既約成分 $\text{Spec } \Lambda(p)$ を一つをとり, その上の $\text{Spec } J'$ の既約成分 $\text{Spec } J''$ をとる. さらに, その商体 $\text{Frac}(J'')$ 内での J'' normalization を J とすると, $J/\Lambda(p)$ が求めるものになっている. 後半の主張は exact control theorem の帰結である. $\square$

上記の $(J, \lambda : h \longrightarrow J)$ のことを λ_{π} を通る Hida family ということにする.

¹¹ ρ に対応する数論的指標を θ_{ρ} とし, その arithmetic prime を $\mathcal{P}_{\theta_{\rho}}$ とする. $\text{Spec } \Lambda = \bigcup_{\mathfrak{p}} \text{Spec } \Lambda(p)$ なので, $\mathcal{P}_{\theta_{\rho}}$ が属する既約成分 $\text{Spec } \Lambda(p)$ をとる. $\mathcal{P}_{\theta_{\rho}}$ の上の $\text{Spec } J$ の点 $\mathcal{P}'$ に対して,

$$\lambda \bmod \mathcal{P}' : h \otimes_{\Lambda} \Lambda(p)/\mathcal{P}_{\theta_{\rho}} \longrightarrow J/\mathcal{P}' \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$$

は λ_{π} と一致する.

¹²twists によって, 動く highest weight の方向は parabolic subgroup Q のとり方に依存しており, それに関しては p.4,5 に書いてある.

6. GALOIS REPRESENTATION ASSOCIATED TO A HIDA FAMILY

π を $G(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}) = GSp_4(\mathbb{A}_F)$ の既約 cuspidal 保型表現で, level $U \subset G(\widehat{\mathbb{Z}})$, 無限成分が regular cohomological weight をもつ discrete series と非自明な共通成分をもつとする. $\pi_{\tau}, \tau : F \hookrightarrow \mathbb{R}$ の最高 weight を $(a_{\tau}, b_{\tau}; c_{\tau})_{\tau: F \hookrightarrow \mathbb{R}}$ とし, $\text{Ram}(\pi)$ を F の有限素点で π_v は分岐するもの全体の集合とする. 通常よく考えるのは $c_{\tau} = a_{\tau} + b_{\tau}$ の場合である.

予想 1. 任意の素数 p と埋め込み $\iota : \overline{\mathbb{Q}} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$ に対して, $\text{Ram}(\pi) \cup \{v|p\}$ の外不分岐な, potentially semistable 連続ガロア表現

$$r_{\pi, \iota} : \text{Gal}(\overline{F}/F) \longrightarrow \text{GSp}_4(\overline{\mathbb{Q}}_p)$$

が存在して, 次を満たす:

- $v \notin \text{Ram}(\pi) \cup \{v|p\}$ に対して, $\det(X - r_{\pi, \iota}(\text{Frob}_v)) = \lambda_{\pi}(Q_v(X))$. ただし,

$$Q_v(X) := X^4 - T_v X^3 + q_v(R_v + (1 + q_v^2)S_v)X^2 - q_v^3 T_v S_v X + q_v^6 S_v^2$$

であり, T_v, R_v, S_v はそれぞれ $\text{diag}(1, 1, \pi_v, \pi_v)$, $\text{diag}(1, \pi_v, \pi_v^2, \pi_v)$, $\text{diag}(\pi_v, \pi_v, \pi_v, \pi_v)$ に付随する Hecke 作用素.

- $v|p$ かつ $v \notin \text{Ram}(\pi)$ ならば, $r_{\pi, \iota}|_{G_{F_v}}$ は crystalline でその Hodge-Tate weight は

$$\frac{a_{\tau} + b_{\tau} + c_{\tau}}{2} + 3, \frac{a_{\tau} - b_{\tau} + c_{\tau}}{2} + 2, \frac{-a_{\tau} + b_{\tau} + c_{\tau}}{2} + 1, \frac{-a_{\tau} - b_{\tau} + c_{\tau}}{2}.$$

さらに $D_{\text{crys}}(r_{\pi, \iota}|_{G_{F_v}})$ に作用する crystalline Frobenius の固有多項式は $\lambda_{\pi}(Q_v(X))$ に一致.

予想 2. 予想 1 のガロア表現 $r_{\pi, \iota}$ に対して, もし π が任意の $v|p$ で不分岐かつ (p, Q) -ordinary ならば,

$$r_{\pi, \iota}(\text{Gal}(\overline{F}_v/F_v)) \subset \widehat{Q}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$$

が成立. ただし, $\widehat{Q}$ は G の Langlands dual ${}^L G$ 内の Q の行き先を意味し, $\widehat{\text{Borel}} = \text{Borel}$, $\widehat{\text{Siegel}} = \text{Klingen}$ となっている.

定理 5. 予想 1,2 を仮定すると, (p, Q) -ordinary な Hecke eigensystems を通る Hida family $\lambda : h \longrightarrow J$ に対してガロア表現

$$r_J : \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \longrightarrow \text{GSp}_4(\text{Frac}(J))$$

が存在して, 次を満たす:

- $v \notin \text{Ram}(r_J) \cup \{v|p\}$ ならば, $\det(X - r_{\pi, \iota}(\text{Frob}_v)) = \lambda(Q_v(X))$.
- $v|p$ ならば, $r_J(\text{Gal}(\overline{F}_v/F_v)) \subset \widehat{Q}(\text{Frac}(J))$.

証明. 証明には Taylor の GSp_4 に値を持つ擬表現の理論 [5],[6] を使う. □

注意 3. $F = \mathbb{Q}$ のときは, 予想 1 は Weissauer[9] によって, 予想 2 は Urban [8] によってそれぞれ解決されている. また, 千田氏の講演でも紹介されたように, π が generic かつある有限素点 v で π_v が 2 乗可積分であれば, 予想 1 は正しいことが Sorensen によって証明されている ([4]).

REFERENCES

- [1] Hida, Haruzo Control theorems of p -nearly ordinary cohomology groups for $SL(n)$. Bull. Soc. Math. France 123 (1995), no. 3, 425–475.
- [2] H. Hida, Control theorems of coherent sheaves on Shimura varieties of PEL type. J. Inst. Math. Jussieu 1 (2002), no. 1, 1–76
- [3] 落合理, 肥田理論概説, ss2009 報告集.
- [4] Claus M. Sorensen, Galois representations and Hilbert-Siegel modular forms, to appear in Documenta Mathematica.
- [5] On congruences between modular forms, PhD. thesis, Princeton University 1988 (available on his homepage).
- [6] R. Taylor, Galois representations associated to Siegel modular forms of low weight. Duke Math. J. 63 (1991), no. 2, 281–332.
- [7] J. Tilouine and E. Urban, Several-variable p -adic families of Siegel-Hilbert cusp eigensystems and their Galois representations. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 32 (1999), no. 4, 499–574.
- [8] E. Urban, Eric Sur les représentations p -adiques associees aux représentations cuspidales de $GSp_4/\mathbb{Q}$. Formes automorphes. II. Le cas du groupe $GSp(4)$. Asterisque No. 302 (2005), 151–176.
- [9] R. Weissauer, Endoscopy for $GSp(4)$ and the cohomology of Siegel modular threefolds. Lecture Notes in Mathematics, 1968. Springer-Verlag, Berlin, 2009. xviii+368 pp.