

GL(n) の Γ 因子について (Part I)

北里大学一般教育部 宮崎 直

平成 28 年 9 月 20 日

1 Introduction

この講演を通して、次の記号を用いる：

$G = G_n := \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$	一般線型群 (general linear group),
$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_n := \mathrm{Lie}(G) (= \mathrm{M}_n(\mathbb{R}))$	G に付随する Lie 代数,
$K = K_n := \mathrm{O}(n)$	G の極大コンパクト部分群.

まず、簡約 Lie 群の表現論における基本的な概念を紹介する（詳しくは [Kn2], [Wa] を参照）． (π, H_π) を G の Hilbert 表現（表現空間が $\mathbb{C}$ 上の Hilbert 空間である表現）とし、

$$H_\pi^\infty := \{v \in H_\pi \mid G \ni g \mapsto \pi(g)v \in H_\pi \text{ は } C^\infty \text{ 級}\}$$

とおく。このとき、 H_π 上の G の作用から、 H_π^∞ 上の $\mathfrak{g}$ の作用が次のように誘導される：

$$\pi(X)v := \left. \frac{d}{dt} \pi(\exp(tX))v \right|_{t=0} \quad (X \in \mathfrak{g}, v \in H_\pi^\infty).$$

H_π の元 v に対して、 $\{\pi(k)v \mid k \in K\}$ が生成する H_π の部分空間が有限次元であるとき、 v は K -finite であるという。

$$H_{\pi,K} := \{v \in H_\pi^\infty \mid v \text{ は } K\text{-finite}\}$$

とおくと、 $H_{\pi,K}$ は H_π の稠密な部分空間である． $(\pi, H_{\pi,K})$ は $\mathfrak{g}$ -加群かつ K -加群であり、 $(\mathfrak{g}, K)$ -加群と呼ばれるものになる．また、コンパクト群の表現については、

- コンパクト群の Hilbert 表現はユニタリ化可能であり、完全可約である、
- コンパクト群の既約表現は有限次元である、

などが成り立ち、自然な射 $\mathrm{Hom}_K(V_\tau, H_{\pi,K}) \otimes V_\tau \ni T \otimes v \mapsto T(v) \in H_{\pi,K}$ から

$$H_{\pi,K} \simeq \bigoplus_{(\tau, V_\tau) \in \hat{K}} \mathrm{Hom}_K(V_\tau, H_{\pi,K}) \otimes V_\tau.$$

という同型が得られる．ここで、 $\hat{K}$ は K の既約表現の同型類全体のなす集合である． K の既約表現 (τ, V_τ) が $\mathrm{Hom}_K(V_\tau, H_{\pi,K}) \neq \{0\}$ を満たすとき、 τ を π の K -タイプという。

すべての K の既約表現 (τ, V_τ) に対して $\mathrm{Hom}_K(V_\tau, H_{\pi,K})$ が有限次元であるとき、 G の Hilbert 表現 π は admissible であるという．本講演では、主に G の既約 admissible 表現を扱う。

命題 1

π が G の既約ユニタリ表現であるとき、 π は admissible である。

注意 1 $\Pi \simeq \Pi_\infty \otimes \bigotimes_p' \Pi_p$ を $\mathrm{GL}(n, \mathbb{A}_\mathbb{Q})$ の cuspidal 保型表現とすると、ある $t \in \mathbb{R}$ が存在して $\Pi \otimes |\det|_{\mathbb{A}_\mathbb{Q}}^{-t}$ は既約ユニタリ表現となるから、無限素点における局所成分 $\Pi_\infty \otimes |\det|^{-t}$ も既約ユニタリ表現である。よって、命題 1 より、 Π_∞ は既約 admissible 表現だとわかる。

命題 2

G の admissible な Hilbert 表現 (π, H_π) に対して、 π が G の既約表現であるための必要十分条件は π が既約 $(\mathfrak{g}, K)$ -加群であることである。

今日の講演の内容は以下のとおりである：

- G_n の既約 admissible 表現の $(\mathfrak{g}, K)$ -加群としての同型類を分類し、 L 因子を定義する。また、 G_n の cohomological 表現について知られている事実を紹介する。
- G_3 上の Whittaker 関数の明示式と、それを用いた局所ゼータ積分の計算を紹介する。

2 一般主系列表現

$\nu \in \mathbb{C}$, $\delta \in \{0, 1\}$, $l \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して、次のように $\chi_{(\nu, \delta)}$ と $D_{(\nu, l)}$ を定義する：

- $\chi_{(\nu, \delta)}: G_1 = \mathbb{R}^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ を $\chi_{(\nu, \delta)}(t) = \mathrm{sgn}(t)^\delta |t|^\nu$.
- $(D_{(\nu, l)}, V_{D_{(\nu, l)}})$ を以下を満たす $G_2 = \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ の既約 Hilbert 表現とする：

$$D_{(\nu, l)}(t1_2) = t^{2\nu} \quad (t \in \mathbb{R}_+), \quad D_{(\nu, l)}|_{\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})} = D_l^+ \oplus D_l^-.$$

ここで、 D_l^+ は $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ の最低ウェイト $l+1$ の正則離散系列表現 (holomorphic discrete series representation) とし、 D_l^- はその反傾表現とする。このような表現 $D_{(\nu, l)}$ は、同型を除いて唯 1 つに定まる。

注意 2 $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ の最低ウェイト $l+1$ の正則離散系列表現 D_l^+ は、上半平面 $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ 上のウェイト $l+1$ の正則保型形式に対応する表現である。

$n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$ を満たす $n_1, n_2, \dots, n_r \in \{1, 2\}$ に対して、 $P = P_{n_1, n_2, \dots, n_r}$ を

$$p = \begin{pmatrix} p_1 & * & \cdots & * \\ & p_2 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & p_r \end{pmatrix} \quad (p_j \in G_{n_j}, \quad j = 1, 2, \dots, r) \quad (2.1)$$

という形の元全体のなす $G = G_n$ の部分群とする。このような P を G の標準放物型部分群という。 $\delta_P: P \rightarrow \mathbb{R}_+$ を P の modulus, すなわち、 P 上の左不変測度 $d_L h$ に対して

$$\int_P f(hp) d_L h = \delta_P(p) \int_P f(h) d_L h$$

で定まる P 上の関数とする。

例 1 $p \in P$ に対して, $p_1, p_2, \dots, p_r$ を (2.1) のようにとる.

$$(1) P = P_{1,1,\dots,1} \subset G_n \text{ であるとき, } \delta_P(p) = \prod_{j=1}^n |p_j|^{n+1-2j} \text{ となる.}$$

$$(2) P = P_{2,1} \subset G_3 \text{ であるとき, } \delta_P(p) = \frac{|\det p_1|}{|p_2|^2} \text{ となる.}$$

$j = 1, 2, \dots, r$ に対して,

$$n_j = 1 \text{ ならば } \sigma_j = \chi_{(\nu_j, \delta_j)},$$

$$n_j = 2 \text{ ならば } \sigma_j = D_{(\nu_j, l_j)}$$

という形の G_{n_j} の既約 Hilbert 表現 (σ_j, V_{σ_j}) をとり, これらの既約 Hilbert 表現から $P = P_{n_1, n_2, \dots, n_r}$ の既約 Hilbert 表現 (σ, V_σ) を

$$\sigma(p) = \sigma_1(p_1) \otimes \sigma_2(p_2) \otimes \dots \otimes \sigma_r(p_r) \quad (p \in P), \quad V_\sigma = V_{\sigma_1} \otimes V_{\sigma_2} \otimes \dots \otimes V_{\sigma_r}$$

で定義し, V_σ 上の内積を $(\cdot, \cdot)_\sigma$ と書く. ここで $p \in P$ に対して, $p_1, p_2, \dots, p_r$ は (2.1) のようにとる. この P の表現 (σ, V_σ) から G の表現 $(\pi_\sigma, H_{\pi_\sigma})$ を次のように定義する:

- 表現空間: $H_{\pi_\sigma}^0 := \{f: G \rightarrow V_\sigma \text{ 連続} \mid f(pg) = \delta_P(p)^{\frac{1}{2}} \sigma(p) f(g) \quad (p \in P, g \in G)\}$ を内積

$$(f_1, f_2)_{\pi_\sigma} = \int_K (f_1(k), f_2(k))_\sigma dk \quad (f_1, f_2 \in H_{\pi_\sigma}^0)$$

によって完備化して得られる Hilbert 空間を H_{π_σ} とする.

- 作用: 右移動 $(\pi_\sigma(g)f)(h) = f(hg) \quad (g, h \in G, f \in H_{\pi_\sigma}^0)$ から H_{π_σ} 上の作用 π_σ を誘導する.

この G の表現 π_σ を $\text{Ind}_P^G(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r)$ という記号で表し, 一般主系列表現 (generalized principal series representation) という.

定理 1 ([Kn1, Theorem 1])

- (1) $\text{Re}(\nu_1) \geq \text{Re}(\nu_2) \geq \dots \geq \text{Re}(\nu_r)$ を満たすとき, π_σ は唯 1 つの既約な商表現をもつ. この既約な商表現を $J(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r)$ という記号で表し, Langlands 商という.
- (2) 任意の G の既約 admissible 表現 π に対して, π と $(\mathfrak{g}, K)$ -加群として同型となるような Langlands 商 $J(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r)$ が存在する.
- (3) 2 つの Langlands 商 $J(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r)$ と $J(\sigma'_1, \sigma'_2, \dots, \sigma'_{r'})$ が $(\mathfrak{g}, K)$ -加群として同型となるための必要十分条件は, $r = r'$ かつ $\sigma'_1 = \sigma_{s(1)}, \sigma'_2 = \sigma_{s(2)}, \dots, \sigma'_r = \sigma_{s(r)}$ となる置換 $s \in \mathfrak{S}_r$ が存在することである.

注意 3 定理 1 (1) の条件は [Kn1, Theorem 1] と異なるが, この部分は [Kn1, Theorem 1] の誤植であることを都築正男氏 (上智大学) に指摘していただいた. このことは一般の場合の Langlands 分類 [Kn2, Theorem 14.92] と比較することでわかる.

注意 4 ほとんどの $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_r$ に対して, 一般主系列表現 $\text{Ind}_P^G(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r)$ は既約である. 一般主系列表現が可約になる条件については [SV] を参照.

注意 5 $P_2 = G_2$ であり, $\text{Ind}_{P_2}^{G_2}(D_{(\nu, l)}) \simeq D_{(\nu, l)}$ となる.

3 局所 Langlands 対応

$\mathbb{R}$ の Weil 群 $W_{\mathbb{R}} := \mathbb{C}^{\times} \sqcup (\mathbb{C}^{\times} \kappa)$ ($\kappa^2 = -1$, $\kappa z \kappa = -\bar{z}$ ($z \in \mathbb{C}^{\times}$)) の表現について考える。 $\nu \in \mathbb{C}$, $\delta \in \{0, 1\}$, $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して, $W_{\mathbb{R}}$ の表現 ϕ_{ν}^{δ} と $\phi_{\nu, l}$ を次のように定義する:

- 1次元表現 $\phi_{\nu}^{\delta}: W_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{C}^{\times}$ を $\phi_{\nu}^{\delta}(z) = |z|^{2\nu}$ ($z \in \mathbb{C}^{\times}$), $\phi_{\nu}^{\delta}(\kappa) = (-1)^{\delta}$ で定める.
- 2次元表現 $\phi_{\nu, l}: W_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ を

$$\phi_{\nu, l}(z) = |z|^{2\nu-l} \begin{pmatrix} \bar{z}^l & 0 \\ 0 & z^l \end{pmatrix} \quad (z \in \mathbb{C}^{\times}), \quad \phi_{\nu, l}(\kappa) = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^l \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

で定める. $l > 0$ ならば $\phi_{\nu, l}$ は既約であり, $\phi_{\nu, 0} \simeq \phi_{\nu}^0 \oplus \phi_{\nu}^1$ となる.

命題 3

$W_{\mathbb{R}}$ の既約表現の同型類は $\{\phi_{\nu}^{\delta} \mid \nu \in \mathbb{C}, \delta \in \{0, 1\}\} \cup \{\phi_{\nu, l} \mid \nu \in \mathbb{C}, l \in \mathbb{Z}_{>0}\}$ で尽くされる.

$\nu \in \mathbb{C}$, $\delta \in \{0, 1\}$, $l \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して,

$$\phi[\chi_{(\nu, \delta)}] = \phi_{\nu}^{\delta}, \quad \phi[D_{(\nu, l)}] = \phi_{\nu, l}$$

と定義する. G_n の既約許容表現 π に対して, $(\mathfrak{g}, K)$ -加群として同型な Langlands 商 $J(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r)$ をとり, $W_{\mathbb{R}}$ の n 次元表現 $\phi[\pi]$ を

$$\phi[\pi] = \phi[\sigma_1] \oplus \phi[\sigma_2] \oplus \dots \oplus \phi[\sigma_r]$$

と定義する. この $\phi[\pi]$ を π の Langlands パラメーターという. 定理 1 と命題 3 より, Langlands パラメーターは well-defined であり, 次の局所 Langlands 対応が得られる.

定理 2 ([Kn1, Theorem 2])

G_n の既約 admissible 表現の $(\mathfrak{g}, K)$ -加群としての同型類全体の集合から $W_{\mathbb{R}}$ の完全可約な n 次元表現の同型類全体の集合への全単射が $\pi \mapsto \phi[\pi]$ で与えられる.

次に, L 因子と ϵ 因子を定義する. $\psi_{\mathbb{R}}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^{\times}$ を標準指標, すなわち,

$$\psi_{\mathbb{R}}(t) = \exp(2\pi\sqrt{-1}t) \quad (t \in \mathbb{R})$$

とする. $\nu \in \mathbb{C}$, $\delta \in \{0, 1\}$, $l \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して, Weil 群 $W_{\mathbb{R}}$ の既約表現 ϕ_{ν}^{δ} , $\phi_{\nu, l}$ の L 因子と ϵ 因子を

$$\begin{aligned} L(s, \phi_{\nu}^{\delta}) &:= \Gamma_{\mathbb{R}}(s + \nu + \delta), & \epsilon(s, \phi_{\nu}^{\delta}, \psi_{\mathbb{R}}) &:= (\sqrt{-1})^{\delta}, \\ L(s, \phi_{\nu, l}) &:= \Gamma_{\mathbb{C}}(s + \nu + l/2), & \epsilon(s, \phi_{\nu, l}, \psi_{\mathbb{R}}) &:= (\sqrt{-1})^{l+1} \end{aligned}$$

と定義する. ここで, $\Gamma_{\mathbb{R}}(s) := \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)$, $\Gamma_{\mathbb{C}}(s) := 2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)$ とする. Weil 群 $W_{\mathbb{R}}$ の完全可約な表現 ϕ の既約分解を $\phi = \bigoplus_{j=1}^r \phi_j$ とするとき, ϕ の L 因子と ϵ 因子を

$$L(s, \phi) := \prod_{j=1}^r L(s, \phi_j), \quad \epsilon(s, \phi, \psi_{\mathbb{R}}) := \prod_{j=1}^r \epsilon(s, \phi_j, \psi_{\mathbb{R}})$$

と定義する． π と π' をそれぞれ G_n と $G_{n'}$ の既約 admissible 表現とするととき， L 因子 $L(s, \pi)$, $L(s, \pi \times \pi')$ と ϵ 因子 $\epsilon(s, \pi, \psi_{\mathbb{R}})$, $\epsilon(s, \pi \times \pi', \psi_{\mathbb{R}})$ を Langlands パラメーターを用いて

$$\begin{aligned} L(s, \pi) &:= L(s, \phi[\pi]), & \epsilon(s, \pi, \psi_{\mathbb{R}}) &:= \epsilon(s, \phi[\pi], \psi_{\mathbb{R}}), \\ L(s, \pi \times \pi') &:= L(s, \phi[\pi] \otimes \phi[\pi']), & \epsilon(s, \pi \times \pi', \psi_{\mathbb{R}}) &:= \epsilon(s, \phi[\pi] \otimes \phi[\pi'], \psi_{\mathbb{R}}) \end{aligned}$$

と定義する． ここで， $\phi[\pi] \otimes \phi[\pi']$ を書き下すには， 次の補題を用いればよい．

補題 1

$\nu, \nu' \in \mathbb{C}$, $\delta, \delta' \in \{0, 1\}$, $l, l' \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して，

$$\phi_{\nu}^{\delta} \otimes \phi_{\nu'}^{\delta'} \simeq \phi_{\nu+\nu'}^{|\delta-\delta'|}, \quad \phi_{\nu, l} \otimes \phi_{\nu'}^{\delta'} \simeq \phi_{\nu+\nu', l}, \quad \phi_{\nu, l} \otimes \phi_{\nu', l'} \simeq \phi_{\nu+\nu', l+l'} \oplus \phi_{\nu+\nu', |l-l'|}$$

が成立する．

例 2 $\pi = \text{Ind}_{P_{2,1}}^{G_3}(D_{(\nu_1, l)}, \chi_{(\nu_2, \delta)})$, $\pi' = D_{(\nu', l')}$ に対して， その Langlands パラメーターは

$$\phi[\pi] = \phi_{\nu_1, l} \oplus \phi_{\nu_2}^{\delta}, \quad \phi[\pi'] = \phi_{\nu', l'}$$

であるから， 補題 1 より， $\phi[\pi] \otimes \phi[\pi'] = \phi_{\nu_1+\nu', l+l'} \oplus \phi_{\nu_1+\nu', |l-l'|} \oplus \phi_{\nu_2+\nu', l'}$ となる． よって，

$$\begin{aligned} L(s, \pi \times \pi') &= \Gamma_{\mathbb{C}}\left(s + \nu_1 + \nu' + \frac{l+l'}{2}\right) \Gamma_{\mathbb{C}}\left(s + \nu_1 + \nu' + \frac{|l-l'|}{2}\right) \Gamma_{\mathbb{C}}\left(s + \nu_2 + \nu' + \frac{l'}{2}\right), \\ \epsilon(s, \pi \times \pi', \psi_{\mathbb{R}}) &= (\sqrt{-1})^{l+2l'+3+|l-l'|} \end{aligned}$$

となることがわかる．

4 cohomological 表現

最高ウェイト理論により， G_n の代数的既約有限次元表現の同型類全体の集合と

$$\{\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) \in \mathbb{Z}^n \mid \mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n\} \quad (4.1)$$

の間に 1 対 1 対応が与えられる． 以下， 集合 (4.1) の元 μ に対応する G_n の代数的既約有限次元表現を (ρ_{μ}, F_{μ}) と表記する． また， (ρ_{μ}, F_{μ}) の反傾表現を $(\tilde{\rho}_{\mu}, \tilde{F}_{\mu})$ と表記する．

$H^q(\mathfrak{g}_n, \text{SO}(n)\mathbb{R}_+; H_{\pi, K} \otimes \tilde{F}_{\mu}) \neq \{0\}$ となる $q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が存在するとき， G の既約許容表現 (π, H_{π}) は μ に関して cohomological であるという．

定理 3 (Clozel [Cl])

$\Pi \simeq \Pi_{\infty} \otimes \bigotimes_p' \Pi_p$ を $\text{GL}(n, \mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ の cuspidal 保型表現とし， Π_{∞} は $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ に関して cohomological であるとする． このとき， ある $w \in \mathbb{Z}$ が存在して， $\mu_j + \mu_{n+1-j} = w$ ($j = 1, 2, \dots, n$) となる． さらに次のように， Π_{∞} は一般主系列表現と同型になる：

- $n = 2r$ のとき， $\Pi_{\infty} \simeq \text{Ind}_{P_{2, \dots, 2}}^{G_n}(D_{(w/2, l_1)}, \dots, D_{(w/2, l_r)})$,
- $n = 2r + 1$ のとき， $\Pi_{\infty} \simeq \text{Ind}_{P_{2, \dots, 2, 1}}^{G_n}(D_{(w/2, l_1)}, \dots, D_{(w/2, l_r)}, \chi_{(w/2, \delta)})$ ($\exists \delta \in \{0, 1\}$).

ここで， $l_j = \mu_j - \mu_{n+1-j} + n + 1 - 2j$ ($j = 1, 2, \dots, r$) とする．

定理 4 (Borel–Wallach [BW])

$\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) \in \mathbb{Z}^n$ と $w \in \mathbb{Z}$ が $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n$ と $\mu_j + \mu_{n+1-j} = w$ ($j = 1, 2, \dots, n$) を満たすとし, $l_j = \mu_j - \mu_{n+1-j} + n + 1 - 2j$ ($j \in \mathbb{Z}, 1 \leq 2j \leq n$) とおく.

- (1) $n = 2r$ のとき, $\pi = \text{Ind}_{P_2, \dots, 2}^{G_n}(D_{(w/2, l_1)}, \dots, D_{(w/2, l_r)})$ とおくと, (π, H_π) は既約であり, 次の同型が成り立つ:

$$H^q(\mathfrak{g}_n, \text{SO}(n)\mathbb{R}_+; H_{\pi, K} \otimes \tilde{F}_\mu) \simeq \mathbb{C}^2 \otimes \bigwedge^{q-r^2} \mathbb{C}^{r-1}.$$

- (2) $n = 2r + 1$ のとき, $\delta \in \{0, 1\}$ に対して, $\pi = \text{Ind}_{P_2, \dots, 2, 1}^{G_n}(D_{(w/2, l_1)}, \dots, D_{(w/2, l_r)}, \chi_{(w/2, \delta)})$ とおくと, (π, H_π) は既約であり, 次の同型が成り立つ:

$$H^q(\mathfrak{g}_n, \text{SO}(n)\mathbb{R}_+; H_{\pi, K} \otimes \tilde{F}_\mu) \simeq \bigwedge^{q-r(r+1)} \mathbb{C}^r.$$

5 Whittaker 関数

G の Iwasawa 分解 $G = NAK$ を次のようにとる:

$$N = N_n := \left\{ x = \begin{pmatrix} 1 & x_{1,2} & \cdots & x_{1,n} \\ & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & x_{n-1,n} \\ & & & 1 \end{pmatrix} \middle| x_{i,j} \in \mathbb{R} \quad (1 \leq i < j \leq n) \right\},$$

$$A = A_n := \left\{ y = \begin{pmatrix} y_1 y_2 \cdots y_n & & & \\ & y_2 \cdots y_n & & \\ & & \ddots & \\ & & & y_n \end{pmatrix} \middle| y_i \in \mathbb{R}_+ \quad (1 \leq i \leq n) \right\},$$

$$K = K_n := \text{O}(n).$$

非自明なユニタリ指標 $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ に対して, $\psi_N: N \rightarrow \mathbb{C}^\times$ を

$$\psi_N(x) = \psi(x_{1,2} + x_{2,3} + \cdots + x_{n-1,n}) \quad (x = (x_{i,j}) \in N)$$

と定義し,

$$C^\infty(N \backslash G; \psi) := \{f \in C^\infty(G) \mid f(xg) = \psi_N(x)f(g) \quad (x \in N, g \in G)\}$$

とおく. G はこの空間に右移動で作用するとし, K -finite な元全体のなす $C^\infty(N \backslash G; \psi)$ の部分空間を $C^\infty(N \backslash G; \psi)_K$ で表す.

G の既約 admissible 表現 (π, H_π) に対して,

$$\mathcal{I}_{\pi, \psi} := \{\Phi \in \text{Hom}_{\mathfrak{g}, K}(H_{\pi, K}, C^\infty(N \backslash G; \psi)_K) \mid \Phi(v) \text{ は緩増加 } (v \in H_{\pi, K})\}$$

とおく. このとき, 次の命題が成立する.

命題 4 (Shalika, Wallach)

任意の G の既約 admissible 表現 π に対して, $\dim \mathcal{I}_{\pi,\psi} \leq 1$ が成立する.

$\mathcal{I}_{\pi,\psi} \neq \{0\}$ であるとき, π は generic であるといい,

$$\mathcal{W}(\pi, \psi) := \{\Phi(v) \mid \Phi \in \mathcal{I}_{\pi,\psi}, v \in H_{\pi,K}\}$$

を π の Whittaker 模型という. また, $\mathcal{W}(\pi, \psi)$ の元を π の Whittaker 関数という.

命題 5 ([Ja, Lemma 2.5])

G の既約 admissible 表現 (π, H_π) が generic であるための必要十分条件は, π が既約な一般主系列表現 $\text{Ind}_P^G(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r)$ と $(\mathfrak{g}, K)$ -加群として同型となることである

注意 6 $\Pi \simeq \Pi_\infty \otimes \bigotimes_p' \Pi_p$ を $\text{GL}(n, \mathbb{A}_\mathbb{Q})$ の cuspidal 保型表現とするとき, Π は generic であるから, その無限素点における局所成分 Π_∞ も generic である.

(τ, V_τ) を π の K -タイプとし, $\varphi: V_\tau \rightarrow \mathcal{W}(\pi, \psi)$ を K -準同型とする. $g \in G$ を Iwasawa 分解 $G = NAK$ に沿って $g = x y k$ ($x \in N, y \in A, k \in K$) と分解したとき,

$$\varphi(v)(g) = \psi(x) \varphi(\tau(k)v)(y) \quad (v \in V_\tau)$$

となるから, φ は $\varphi(v)|_A$ ($v \in V_\tau$) で特徴づけられることがわかる. 現在までに, 次のような場合には $\varphi(v)|_A$ ($v \in V_\tau$) の明示式が与えられている:

$n = 2$: 任意の G_2 の generic な既約 admissible 表現 π に対して, すべての K_2 -タイプにおける明示式が与えられている. (wellknown)

$n = 3$: 任意の G_3 の generic な既約 admissible 表現 π に対して, 極小 K_3 -タイプにおける明示式が与えられている (石井, 織田, 眞鍋, 宮崎 [HIM1, Theorem 3.1]).

一般の n : G_n の既約な主系列表現 $\pi = \text{Ind}_{P_1, \dots, 1}^{G_n}(\chi(\nu_1, \delta_1), \chi(\nu_2, \delta_2), \dots, \chi(\nu_n, \delta_n))$ に対して, 極小 K_n -タイプにおける明示式が与えられている (Stade, 石井, 織田 [IO]).

6 Whittaker 関数の明示式

本節では, G_2 と G_3 の generic な既約 admissible 表現の Whittaker 関数の明示式の一部を紹介する. まず, K_2 の既約表現を構成する. $\lambda \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して, $V_\lambda^{(2)} := \mathbb{C}v_\lambda \oplus \mathbb{C}v_{-\lambda}$ とおき,

$$\tau_\lambda^{(2)} \left(\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \right) v_q = e^{\sqrt{-1}q\theta} v_q, \quad \tau_\lambda^{(2)} \left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) v_q = v_{-q} \quad (q \in \{\pm\lambda\})$$

として, K_2 の $V_\lambda^{(2)}$ 上の作用を定める. このとき, $(\tau_\lambda^{(2)}, V_\lambda^{(2)})$ は K_2 の既約表現であり, K_2 の既約表現の同型類全体の集合 $\widehat{K_2}$ は $\{1, \det\} \cup \{(\tau_\lambda^{(2)}, V_\lambda^{(2)}) \mid \lambda \in \mathbb{Z}_{>0}\}$ で尽くされる.

補題 2

$\nu \in \mathbb{C}$ と $l \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して, K_2 の表現として $D_{(\nu, l)}|_{K_2} \simeq \bigoplus_{j=0}^{\infty} \tau_{l+1+2j}^{(2)}$ と既約分解される.

定理 5

$\varepsilon \in \{\pm 1\}$ とする. 任意の $\varphi \in \text{Hom}_K(V_{l+1}^{(2)}, \mathcal{W}(D_{(\nu, l)}, \psi_{\mathbb{R}}^{\varepsilon}))$ に対して, ある定数 C が存在して,

$$\varphi(v_{\varepsilon(l+1)})(y) = C y_1^{\nu + \frac{l+1}{2}} y_2^{2\nu} \exp(-2\pi y_1) = C \frac{y_1^{1/2} y_2^{2\nu}}{4\pi\sqrt{-1}} \int_{\alpha-\sqrt{-1}\infty}^{\alpha+\sqrt{-1}\infty} \Gamma_{\mathbb{C}}\left(s + \nu + \frac{l}{2}\right) y_1^{-s} ds,$$

$$\varphi(v_{-\varepsilon(l+1)})(y) = 0$$

となる. ここで, $y = \text{diag}(y_1 y_2, y_2) \in A_2$ とし, α は十分大きい実数とする.

次に, K_3 の既約表現を構成する. $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \times \{0, 1\}$ に対して. $\mathcal{P}_{\lambda}$ を z_1, z_2, z_3 の λ_1 次同次多項式のなす $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とし, K_3 の $\mathcal{P}_{\lambda}$ 上の作用 T_{λ} を

$$(T_{\lambda}(k)f)(z_1, z_2, z_3) = (\det k)^{\lambda_2} f((z_1, z_2, z_3)k) \quad (k \in K_3, f \in \mathcal{P}_{\lambda})$$

で定める. ここで, $\tau_{\lambda}^{(3)}$ を $V_{\lambda}^{(3)} = \mathcal{P}_{\lambda}/(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2)\mathcal{P}_{\lambda-(2,0)}$ 上の T_{λ} の商表現とする. ただし, $\lambda - (2, 0) \notin \Lambda_3$ の場合は $\mathcal{P}_{\lambda-(2,0)} = \{0\}$ とする. このとき, $(\tau_{\lambda}^{(3)}, V_{\lambda}^{(3)})$ は K_3 の既約表現であり, K_3 の既約表現の同型類全体の集合 $\widehat{K}_3$ は $\{(\tau_{\lambda}^{(3)}, V_{\lambda}^{(3)}) \mid \lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \times \{0, 1\}\}$ で尽くされる.

補題 3

$\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{C}, l \in \mathbb{Z}_{>0}, \delta \in \{0, 1\}$ に対して, $\pi = \text{Ind}_{P_{2,1}}^{G_3}(D_{(\nu_1, l)}, \chi_{(\nu_2, \delta)})$ とおく. この G の Hilbert 表現 (π, H_{π}) に対して,

$$\text{Hom}_{K_3}(V_{\lambda}^{(3)}, H_{\pi, K_3}) \neq \{0\} \iff \lambda_1 \geq l+1 \text{ かつ } \lambda_1 + \lambda_2 \equiv l+1 + \delta \pmod{2}$$

が成立する. さらに, $\dim \text{Hom}_{K_3}(V_{(l+1, \delta)}^{(3)}, H_{\pi, K_3}) = 1$ となる.

$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \times \{0, 1\}$ とする. $m_1 + m_2 + m_3 = \lambda_1$ を満たす $m = (m_1, m_2, m_3) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^3$ に対して, 単項式 $z_1^{m_1} z_2^{m_2} z_3^{m_3}$ の自然な射 $\mathcal{P}_{\lambda} \rightarrow V_{\lambda}^{(3)}$ による像を u_m^{λ} と書くことにする. このとき,

$$\{u_m^{\lambda} \mid m = (m_1, m_2, m_3) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^3, m_1 + m_2 + m_3 = \lambda_1\}$$

は $V_{\lambda}^{(3)}$ を生成する. ($\lambda_1 \geq 2$ ならば線形独立ではないので基底ではない.)

定理 6 (宮崎 [HIM1, Theorem 3.1 (ii)])

$\varepsilon \in \{\pm 1\}$ とする. $\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{C}, l \in \mathbb{Z}_{>0}, \delta \in \{0, 1\}$ とし, $\pi = \text{Ind}_{P_{2,1}}^{G_3}(D_{(\nu_1, l)}, \chi_{(\nu_2, \delta)})$ は既約であると仮定する. 任意の $\varphi \in \text{Hom}_K(V_{(l+1, \delta)}^{(3)}, \mathcal{W}(\pi, \psi_{\mathbb{R}}^{\varepsilon}))$ に対して, ある定数 C が存在して, $m_1 + m_2 + m_3 = l+1$ を満たす任意の $m = (m_1, m_2, m_3) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^3$ に対して,

$$\begin{aligned} \varphi(u_m^{(l+1, \delta)})(y) = & C(\varepsilon\sqrt{-1})^{m_1-m_3} y_1 y_2 (y_2 y_3)^{2\nu_1+\nu_2} \\ & \times \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^2} \int_{\alpha_2-\sqrt{-1}\infty}^{\alpha_2+\sqrt{-1}\infty} \int_{\alpha_1-\sqrt{-1}\infty}^{\alpha_1+\sqrt{-1}\infty} \Gamma_{\mathbb{C}}\left(s_1 + \nu_1 + \frac{l}{2}\right) \Gamma_{\mathbb{C}}\left(s_2 - \nu_1 + \frac{l}{2}\right) \\ & \times \frac{\Gamma_{\mathbb{R}}(s_1 + \nu_2 + m_1) \Gamma_{\mathbb{R}}(s_2 - \nu_2 + m_3)}{\Gamma_{\mathbb{R}}(s_1 + s_2 + m_1 + m_3)} y_1^{-s_1} y_2^{-s_2} ds_1 ds_2 \end{aligned}$$

となる. ここで, $y = \text{diag}(y_1 y_2 y_2, y_2 y_3, y_3) \in A_3$ とし, α_1, α_2 は十分大きい実数とする.

7 局所ゼータ積分

$\varepsilon \in \{\pm 1\}$ とする. π と π' をそれぞれ G_{n+1} と G_n の generic な既約 admissible 表現とする. $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi_{\mathbb{R}}^{\varepsilon})$ と $W' \in \mathcal{W}(\pi', \psi_{\mathbb{R}}^{-\varepsilon})$ に対して, 局所ゼータ積分 $Z(s, W, W')$ を

$$Z(s, W, W') = \int_{N_n \backslash G_n} W \left(\frac{h}{1} \right) W'(h) |\det(h)|^{s-\frac{1}{2}} dh$$

で定義する. ここで, dh は $N_n \backslash G_n$ 上の右 G_n -不変測度とする. このとき, 次の定理が成り立つ.

定理 7 (Jacquet–Shalika [JS])

π と π' をそれぞれ G_{n+1} と G_n の generic な既約 admissible 表現とする. 任意の $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi_{\mathbb{R}}^{\varepsilon})$ と $W' \in \mathcal{W}(\pi', \psi_{\mathbb{R}}^{-\varepsilon})$ に対して, $\frac{Z(s, W, W')}{L(s, \pi \times \pi')}$ は整関数であり, 局所関数等式

$$\frac{Z(1-s, \widetilde{W}, \widetilde{W}')}{L(1-s, \widetilde{\pi} \times \widetilde{\pi}')} = \epsilon(s, \pi \times \pi', \psi_{\mathbb{R}}) \frac{Z(s, W, W')}{L(s, \pi \times \pi')}$$

を満たす. ここで, $\widetilde{\pi}$ と $\widetilde{\pi}'$ はそれぞれ π と π' の反傾表現とし, $\widetilde{W}$ と $\widetilde{W}'$ は次のようにとる:

$$\widetilde{W}(g) = W \left(\begin{pmatrix} & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & \end{pmatrix} {}^t g^{-1} \right), \quad \widetilde{W}'(h) = W' \left(\begin{pmatrix} & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & \end{pmatrix} {}^t h^{-1} \right) \quad (g \in G_{n+1}, h \in G_n).$$

定理 8 (Jacquet [Ja])

π と π' をそれぞれ G_{n+1} と G_n の generic な既約 admissible 表現とすると,

$$\sum_{j=1}^m Z(s, W_j, W'_j) = L(s, \pi \times \pi').$$

を満たす $(W_j, W'_j) \in \mathcal{W}(\pi, \psi_{\mathbb{R}}^{\varepsilon}) \times \mathcal{W}(\pi', \psi_{\mathbb{R}}^{-\varepsilon})$ ($1 \leq j \leq m$) が存在する.

さらに, Whittaker 関数の明示式を用いた計算により, 次の 2 つの定理が証明される.

定理 9 (Stade [St])

π と π' をそれぞれ G_{n+1} と G_n の既約な不分岐主系列表現

$$\pi = \text{Ind}_{P_{1,\dots,1}}^{G_{n+1}} (\chi(\nu_{1,0}), \chi(\nu_{2,0}), \dots, \chi(\nu_{n+1,0})), \quad \pi' = \text{Ind}_{P_{1,\dots,1}}^{G_n} (\chi(\nu'_{1,0}), \chi(\nu'_{2,0}), \dots, \chi(\nu'_{n,0}))$$

とし, K_{n+1} -不変な $W_0 \in \mathcal{W}(\pi, \psi_{\mathbb{R}}^{\varepsilon})$ と K_{n+1} -不変な $W'_0 \in \mathcal{W}(\pi', \psi_{\mathbb{R}}^{-\varepsilon})$ をとる. このとき, 適当な正規化の下で, $Z(s, W_0, W'_0) = L(s, \pi \times \pi')$ が成立する.

定理 10 (平野–石井–宮崎 [HIM2])

π と π' をそれぞれ G_3 と G_2 の generic な既約 admissible 表現とすると,

$$Z(s, W, W') = L(s, \pi \times \pi')$$

を満たす $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi_{\mathbb{R}}^{\varepsilon})$ と $W' \in \mathcal{W}(\pi', \psi_{\mathbb{R}}^{-\varepsilon})$ が存在する.

参考文献

- [BW] Borel, A., Wallach, N. Continuous cohomology, discrete subgroups, and representations of reductive groups, *Annals of Mathematics studies* 94, Princeton University Press (1980)
- [Cl] Laurent Clozel. Motifs et formes automorphes: applications du principe de fonctorialité. In *Automorphic forms, Shimura varieties, and L-functions, Vol. I (Ann Arbor, MI, 1988)*, volume 10 of *Perspect. Math.*, pages 77–159. Academic Press, Boston, MA, 1990.
- [HIM1] Miki Hirano, Taku Ishii, and Tadashi Miyazaki. The Archimedean Whittaker functions on $GL(3)$. In *Geometry and analysis of automorphic forms of several variables*, volume 7 of *Ser. Number Theory Appl.*, pages 77–109. World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2012.
- [HIM2] Miki Hirano, Taku Ishii, and Tadashi Miyazaki. The archimedean zeta integrals for $GL(3) \times GL(2)$. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, 92(2):27–32, 2016.
- [IO] Taku Ishii and Takayuki Oda. Calculus of principal series Whittaker functions on $SL(n, \mathbf{R})$. *J. Funct. Anal.*, 266(3):1286–1372, 2014.
- [Ja] Hervé Jacquet. Archimedean Rankin-Selberg integrals. In *Automorphic forms and L-functions II. Local aspects*, volume 489 of *Contemp. Math.*, pages 57–172. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009.
- [JS] Hervé Jacquet and Joseph Shalika. Rankin-Selberg convolutions: Archimedean theory. In *Festschrift in honor of I. I. Piatetski-Shapiro on the occasion of his sixtieth birthday, Part I (Ramat Aviv, 1989)*, volume 2 of *Israel Math. Conf. Proc.*, pages 125–207. Weizmann, Jerusalem, 1990.
- [Kn1] A. W. Knap. Local Langlands correspondence: the Archimedean case. In *Motives (Seattle, WA, 1991)*, volume 55 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 393–410. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.
- [Kn2] Anthony W. Knap. *Representation theory of semisimple groups*. Princeton Landmarks in Mathematics. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001. An overview based on examples, Reprint of the 1986 original.
- [SV] Birgit Speh and David A. Vogan, Jr. Reducibility of generalized principal series representations. *Acta Math.*, 145(3-4):227–299, 1980.
- [St] Eric Stade. Mellin transforms of $GL(n, \mathbb{R})$ Whittaker functions. *Amer. J. Math.*, 123(1):121–161, 2001.
- [Wa] Nolan R. Wallach. *Real reductive groups. I*, volume 132 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press Inc., Boston, MA, 1988.