p-ADIC L-FUNCTIONS FOR GL_{2n}

並川健一

1. Notation

1.1. **Algebraic group.** G_m で, $\mathrm{GL}_m/\mathbf{Q}$ を表す. $B_m, T_m, U_m, Z_m \subset G_m, W_{G_m}$ を, それぞれ上三角行列, 対角行列, 冪単行列, 中心行列のなす群, G_m の Weyl 群とする. $m = 2n$ のときは, 添え字を省略する. $H = G_n \times G_n$ とおいて, $G = G_{2n}$ に対角に埋め込む. また次で記号を定める:

$$\mathcal{I}_p = \{A = (a_{ij}) \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbf{Z}_p); a_{ij} \equiv 0 \bmod p \ (i > j)\}.$$

指標 $\nu_i : \mathbb{G}_\mathrm{m} \to \mathbb{G}_\mathrm{m} (i = 1, \dots, 2n)$ に対し, $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_{2n})$ と置いて,

$$\nu(\begin{pmatrix} t_1 & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ & & t_{2n} \end{pmatrix}) = \prod_{i=1}^{2n} \nu_i(t_i)$$

と定める. δ_B で, B の modulas 指標とする. 具体的には, $\nu = (|\cdot|^{2n+1-2}, \dots, |\cdot|^{2n+1-2i}, \dots, |\cdot|^{2n+1-4n})$ と与えられる. 指標 $\chi : \mathbb{G}_\mathrm{m} \to \mathbb{G}_\mathrm{m}$ に対し, $\chi(g) = \chi(\det(g)) (g \in G_m)$ とかく.

$\mathbf{Q}$ の代数閉包の一つを $\overline{\mathbf{Q}}$ とかき, $\mathbf{Q}$ の $\mathbf{C}_p$ への埋め込みを一つ固定する. $\mathbf{C}_p$ の付値 $|\cdot|_p$ を $|p|_p = p^{-1}$ と正規化し, 上で固定した埋め込みによる $\overline{\mathbf{Q}}$ への制限も $|\cdot|_p$ とかく. また $\mathbf{C}$ と $\mathbf{C}_p$ の体としての同型も固定しておく.

1.2. **Automorphic representation.** (π, V_π) を $G(\mathbf{A})$ の既約尖点的保型表現とし, ω_π を π の中心指標とする. (ω_π は, unitary と仮定する.) 次の性質を考える:

(Coh)$_m$ π_∞ はコホモロジー的重さ $m = (m_1, \dots, m_{2n})$ を持つ. すなわち V_m を $G(\mathbf{R})$ の最高ウェイト m の有限次元既約表現とするとき, 次が成り立つ:
- $H^{n^2+n-1}(\mathfrak{g}, K_\infty^\circ, V_m^\vee \otimes V_{\pi_\infty}) \cong \mathrm{Hom}_{K_\infty^\circ}(\wedge^{n^2+n-1}(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}), V_m^\vee \otimes V_{\pi_\infty}) \neq 0$ ($K_\infty^\circ = \mathrm{SO}_{2n}(\mathbf{R})\mathbf{R}_+$, $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(\mathrm{GL}_{2n}(\mathbf{R}))_\mathbf{C}, \mathfrak{k} = \mathrm{Lie}(K_\infty^\circ)_\mathbf{C}$ とおいた);
- $m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_n \geq 0$ で, 各 $1 \leq i \leq n$ に対し, $m_{2n+1-i} = -m_i$.

とくに $m = (0, \dots, 0)$ のときは, (Coh)$_{(0,\dots,0)}$ を (Coh) とかく.

(Unr) π_p は, 不分岐. (このとき, 適当な $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_{2n})(\nu_i : \mathbf{Q}_p^\times \to \mathbf{C}^\times$ は不分岐 $(i = 1, \dots, 2n))$ を用いて, $\pi_p = \mathrm{Ind}_B^G \delta_B^{\frac{1}{2}} \nu$ とかける.)

(Sha) π は, (η, τ)-Shalika 模型を持つ. ($\eta : \mathbf{Q}^\times \backslash \mathbf{A}^\times \to \mathbf{C}^\times$ は, $\omega_\pi = \eta^n$ なる指標, $\tau : \mathbf{Q} \backslash \mathbf{A} / \widehat{\mathbf{Z}} \to \mathbf{C}^\times$ は, $\tau(x) = \exp(2\pi\sqrt{-1}x)(x \in \mathbf{R})$ となる指標.) (Shalika 模型の定義は, 3 節.)

Remark 1.1. $n = 1$ の場合, 重さ k の正則尖点形式には, コホモロジー的重さ $(\frac{k}{2} - 1, 1 - \frac{k}{2})$ が対応する.

Lemma 1.2. ([AG94, Lemma 1.3]) π は, (Unr), (Sha) を満たすとする. 適当な不分岐指標 $\nu_i : \mathbf{Q}_p^\times \to \mathbf{C}^\times (i = 1, \dots, 2n))$ を用いて, $\pi_p \cong \mathrm{Ind}_B^G \delta_B^{\frac{1}{2}} \nu$ とかく. このとき, ある不分岐指標 $\eta : \mathbf{Q}_p^\times \to \mathbf{C}^\times$ が存在して, 次が成り立つ :

$$\nu_i = \eta \nu_{n+i}^{-1} \quad (i = 1, \dots, n).$$

(Coh), (Unr), (Sha) を満たす π に対し, 次の条件を考える:

(Ord) $\pi_p = \mathrm{Ind}_B^G \delta_B^{\frac{1}{2}} \nu$ は 通常的, すなわち, π_p は次の条件を満たす:
- 各 $1 \leq i \leq n$ に対して, $|\nu_{n+i}(p)|_p = p^{-(i-n-\frac{1}{2})}$.

Remark 1.3. (Coh), (Unr), (Sha), (Ord) を仮定する. $\lambda \in \overline{\mathbf{Q}}$ を

$$\lambda = \delta_B^{\frac{1}{2}} \nu(\begin{pmatrix} 1_n & \\ & p1_n \end{pmatrix}) = \left(\prod_{i=1}^n p^{-(2n+1-2(n+i))} \right)^{\frac{1}{2}} \prod_{i=1}^n \nu_{n+i}(p) = p^{\frac{n^2}{2}} \prod_{i=1}^n \nu_{n+i}(p)$$

とおくと, λ は p 進単数. また適当な $\varphi_p = F_\nu \in \pi_p$ と Hecke 作用素があり, λ はその固有値となる.

2. Main Theorem

Theorem 2.1. ([AG94, Proposition 2.4], [AG94, 2.5]) (Coh), (Unr), (Ord), (Sha) を仮定する．また $\omega_{\pi,\infty}=1$ とする．このとき, 適当な $\varphi\in V_\pi$ に対し, $\mathbf{Z}_p^\times$ 上の $\mathbf{C}_p$ 値測度 $\mu=\mu_\varphi$ が存在して, 次を満たす:

- 各 (有限位数) 指標 $\chi:\mathbf{Q}^\times\backslash\mathbf{A}^\times\to\overline{\mathbf{Q}}^\times$ ($\chi_\infty=1,\mathrm{cond}\chi=p^e$) に対し,

$$\int_{\mathbf{Z}_p^\times}\chi(a)d\mu(a)=C_{n,p,\infty}\times L^{(\infty)}(\frac{1}{2},\pi\otimes\chi)\times E(\pi_p,\chi_p),$$

ただし $C_{n,p,\infty},E(\pi_p,\chi_p)$ は次で与えられる (dk は, G_n の Haar 測度, $\mathcal{Z}_\infty(s,\varphi_\infty,\chi)$ の定義は次節):

$$C_{n,p}:=p^{\frac{n^2-n}{2}}(1-p^{-1})^{-n}\times\sharp(W_{G_n})^{-1}\mathrm{vol}(dk,\{A\in\mathrm{M}_n(\mathbf{Z}_p);\ (A\bmod p)\text{ is unipotent.}\}),$$

$$C_{n,p,\infty}=C_{n,p}\mathcal{Z}_\infty(\frac{1}{2},\varphi_\infty,1),\quad E(\pi_p,\chi_p)=\begin{cases}\displaystyle\prod_{i=1}^n(1-\nu_i(p)p^{-\frac{1}{2}})(1-\nu_{n+i}^{-1}(p)p^{-\frac{1}{2}}) & (e=0),\\ \lambda^{-e}p^{\frac{e(n^2-n)}{2}}\left(\sum_{\varepsilon\in(\mathbf{Z}/p^e\mathbf{Z})^\times}\chi_p(\epsilon)\tau(\epsilon p^{-e})\right)^n & (e>0),\end{cases}$$

Remark 2.2. (i) [AG94] では, 一般の代数体上の GL_{2n} で, 定理 2.1 を示している．
(ii) また (Ord) を弱めた条件 "weakly ordinary" ([Ge, Definition 2.8]) を (wOrd) とかく．このとき, [Ge] では, 総実体上の GL_{2n} に対し, π が一般のコホモロジー的重さ m を持ち, 仮定 $(\mathrm{Coh})_m$, (Unr), (wOrd), (Sha) を満たすとき, 定理 2.1 を示している．
(iii) (Coh), (Unr), (Ord), (Sha) を満たす π の例は, [AG94, Section 4], [Ge, Section 5] に挙げられている．
(iv) μ_φ が非自明であることと, 次の条件 (Non) は同値:
(Non) ある導手 p^e の有限位数指標 $\chi:\mathbf{Q}^\times\backslash\mathbf{A}^\times\to\mathbf{C}^\times$ が, 存在して, $L(\frac{1}{2},\pi,\chi)\neq0$.
[Ro84, Theorem] により, $n=1$ のとき, 条件 (Non) は満たされる．

3. Shalika model

3.1. Generality.

$\pi=\otimes_v'\pi_v$ を $\mathrm{GL}_n(\mathbf{A})$ の既約尖点的保型表現とする．また π の中心指標 ω_π が, ある $\eta:\mathbf{Q}^\times\backslash\mathbf{A}^\times\to\mathbf{C}^\times$ で, $\omega_\pi=\eta^n$ とかけるとする．

Definition 3.1. (i) $\varphi\in V_\pi$ に対し, $S_\tau^\eta(\varphi):G(\mathbf{A})\to\mathbf{C}$ を次で定義する:

$$S_\tau^\eta(\varphi)(h)=\int_{Z_n(\mathbf{A})G_n(\mathbf{Q})\backslash G_n(\mathbf{A})}dg\int_{\mathrm{M}_n(\mathbf{Q})\backslash\mathrm{M}_n(\mathbf{A})}dX\varphi(\begin{pmatrix}1_n & X\\ & 1_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g & \\ & g\end{pmatrix}h)\tau(-\mathrm{tr}(X))\eta^{-1}(g).$$

$S_\tau^\eta(\pi)=\langle S_\tau^\eta(\varphi);\varphi\in\pi\rangle_{\mathbf{C}}$ とおく．π が "(Sha) (η,τ)-Shalika 模型をもつ" とは, $S_\tau^\eta(\pi)\neq0$ となるときをいう．
(ii) v を $\mathbf{Q}$ の素点とする．線型汎関数 $\lambda_v:V_{\pi_v}\to\mathbf{C}$ で, 次を満たすものをとる:

(ShaFun) $\lambda_v(\pi_v(\begin{pmatrix}1_n & X\\ & 1_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g & \\ & g\end{pmatrix})\xi)=\eta_v(g)\tau_v(\mathrm{tr}(X))\lambda_v(\xi).$

また $S_{\tau_v}^{\eta_v}(\lambda_v):G(\mathbf{Q}_v)\to\mathbf{C}$ を次で定義する:

$$S_{\tau_v}^{\eta_v}(\lambda_v)(h)=\lambda_v(\pi_v(h)\xi).$$

$S_{\tau_v}^{\eta_v}(\pi_v)=\langle S_{\tau_v}^{\eta_v}(\lambda_v);\lambda_v$ は, (ShaFun) を満たす $\rangle_{\mathbf{C}}$ とおく．π_v が "(Sha_v) (η_v,τ_v)-Shalika 模型をもつ" とは, $S_{\tau_v}^{\eta_v}(\pi_v)\neq0$ となるときをいう．

Remark 3.2. $S_\tau^\eta(\varphi)(\begin{pmatrix}1_n & X\\ & 1_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g & \\ & g\end{pmatrix}h)=\eta(g)\tau(\mathrm{tr}(X))S_\tau^\eta(\varphi)(h).$

Definition 3.3. $\varphi\in V_\pi$, 指標 $\chi:\mathbf{Q}^\times\backslash\mathbf{A}^\times\to\mathbf{C}^\times$ に対し, 次を定める:

$$\mathcal{Z}(s,\varphi,\chi)=\int_{Z(\mathbf{A})H(\mathbf{Q})\backslash H(\mathbf{A})}dg_1dg_2\int_{\mathrm{M}_n(\mathbf{Q})\backslash\mathrm{M}_n(\mathbf{A})}dX\varphi(\begin{pmatrix}g_1 & \\ & g_2\end{pmatrix})\chi(g_1g_2^{-1})\eta^{-1}(g_2)|g_1g_2^{-1}|^{s-\frac{1}{2}}.$$

また各素点 v に対し, π_v が (η_v,τ_v)-Shalika 模型を持つ時, $H_v\in S_{\tau_v}^{\eta_v}(\pi_v)$ に対し, 次を定める:

$$\mathcal{Z}(s,H_v,\chi_v)=\int_{G_n(\mathbf{Q}_v)}dgH_v(\begin{pmatrix}g_v & \\ & 1_n\end{pmatrix})\chi_v(g)|g|_v^{s-\frac{1}{2}}.$$

Proposition 3.4. (i) ([FJ93, Proposition 2.3]) $\mathrm{Re}(s)$, が十分大きいとき, $\mathcal{Z}(s,\varphi,\chi)$, は収束し, 有理型に解析接続される. さらに, $\mathrm{Re}(s)\gg 0$ のとき, 次が成り立つ:

$$\mathcal{Z}(s,\varphi,\chi)=\int_{G_n(\mathbf{A})}dgS^{\eta}_{\tau}(\varphi)(\begin{pmatrix}g & \\ & 1_n\end{pmatrix})\chi(g)|g|_{\mathbf{A}}^{s-\frac{1}{2}}.$$

(ii) ([FJ93, Proposition 3.1]) $\mathbf{Q}$ の各素点 v に対し, (ShaFun) を満たす適当な線型汎関数 $\lambda_v:V_{\pi_v}\to\mathbf{C}$ があって, $\mathcal{Z}_v(s,S^{\eta_v}_{\tau_v}(\lambda_v),\chi_v)=L(s,\pi_v,\chi_v)$.

(iii) ([FJ93, Proposition 3.2]) v が有限素点で, π_v が不分岐のとき, (ii) を満たす λ_v は, $\lambda_v(1_{2n})=1$, $\lambda_v(\mathrm{GL}_{2n}(\mathbf{Z}_p))=\{1\}$ ととれる.

Definition 3.5. $S^{\eta}_{\tau}(\varphi)(\varphi\in V_\pi)$ を定義 3.1 (i) の通りとし, v を $\mathbf{Q}$ の素点とする. 指標 $\chi_v:\mathbf{Q}_v^\times\to\mathbf{C}^\times$ に対し, 次を定める:

$$\mathcal{Z}_v(s,\varphi,\chi_v)=\int_{G_n(\mathbf{Q}_v)}dgS^{\eta}_{\tau}(\varphi)(\begin{pmatrix}g & \\ & 1_n\end{pmatrix})\chi_v(g)|g|_v^{s-\frac{1}{2}}.$$

Proposition 3.6. ([FJ93, Theorem 4.1], [AG94, Section 1.1]) π が Shalika 模型をもつとする. S を素点のなす有限集合とする. 各 $v\in S$ に対し, $\varphi_v\in V_{\pi_v}$ をとり, $\varphi_S=\otimes_{v\in S}\varphi_v$ とかく. このとき, 次を満たすような $\varphi^{(S)}\in V_{\pi^{(S)}}$ が存在し, 各指標 $\chi:\mathbf{Q}^\times\backslash\mathbf{A}^\times\to\mathbf{C}^\times$ に対し, 次が成り立つ:

$$\mathcal{Z}(s,\varphi,\chi)=L^{(S)}(s,\pi\otimes\chi)\prod_{v\in S}\mathcal{Z}_v(s,\varphi,\chi_v),\quad(\varphi:=\varphi_S\otimes\varphi^{(S)}).$$

Remark 3.7. (i) [FJ93] では, [PSR88, page 117, Basic Lemma] と同様に, zeta 積分から帰納的に L 因子を取り出すことにより, 局所 Shalika 模型の重複度が 1 であるかどうかを議論せずに, 命題 3.6 を導いている.

(ii) ([AG94, Lemma 1.7]) π が (Unr), (Sha) を満たす時, $\pi_p\cong\mathrm{Ind}_B^G\delta_B^{\frac{1}{2}}\nu$ とかく. このとき, $\nu_i\neq\nu_j^{\pm1}$, $(n+1\le\forall i,j\le 2n)$ (e.g. π が (Ord) を満たすとき) ならば, $S^{\eta_p}_{\tau_p}(\pi_p)$ の重複度は 1.

(iii) ([JR96], [Ni09]) $\eta_v=\widetilde{\eta}_v^2$ となる指標 $\widetilde{\eta}_v$ が存在する時, $S^{\eta_v}_{\tau_v}(\pi_v)$ の重複度は 1.

3.2. **Choice of vector.** π は, (Coh), (Unr), (Sha), (Ord) を満たすとする.

Definition 3.8. $\varphi=\otimes'_v\varphi_v\in V_\pi$ を次で定める:

(i) $v\nmid p\infty$ のとき, $\mathcal{Z}_v(s,\varphi,1)=L(s,\pi_v)$ となるようにとる. (命題 3.6)

(ii) $\pi_p=\mathrm{Ind}_B^G\delta_B^{\frac{1}{2}}\nu$ と同一視する. このとき, $\varphi_p=F_\nu:G(\mathbf{Q}_p)\to\mathbf{C}$ を次で定める:

$$F_\nu(g)=\begin{cases}\delta_B^{\frac{1}{2}}\nu(b), & g\in bw_0\mathcal{I}_p, b\in B, w_0=\begin{pmatrix}0 & & 1\\ & \iddots & \\ 1 & & 0\end{pmatrix},\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

(iii) $v=\infty$ のとき, $\varphi_\infty\in\langle\alpha(X);X\in\wedge^{n^2+n-1}(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}),\alpha\in\mathrm{Hom}_{K_\infty^\circ}(\wedge^{n^2+n-1}(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}),V_{\pi_\infty})\rangle_{\mathbf{C}}\subset V_{\pi_\infty}$ で, $\mathcal{Z}_\infty(\frac{1}{2},\varphi,1)\neq 0$ ととる. ([GRG14, Theorem 6.6.2] ([Su, Theorem 1.7]))

Proposition 3.9.

(i) ([AG94, Proposition 1.4]) 次の H_{φ_p} に対し, $H_{\varphi_p}\in S^{\eta_v}_{\tau_v}(\pi_v)$, かつ $H_{\varphi_p}(1_{2n})\neq 0$:

$$H_{\varphi_p}(h):=\int_{\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z}_p)}dk\int_{\mathrm{M}_n(\mathbf{Z}_p)}dXF_\nu(\begin{pmatrix} & 1_n\\ 1_n & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1_n & X\\ & 1_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k & \\ & k\end{pmatrix}h)\tau(-\mathrm{tr}X)\eta_p^{-1}(k).$$

(ii) ([AG94, (2.1)]) $\lambda:=\delta_B^{\frac{1}{2}}\nu(\begin{pmatrix}1_n & \\ & p1_n\end{pmatrix})=p^{\frac{n^2}{2}}\prod_{i=1}^n\nu_{n+i}(p)$. $\sum_{A\bmod p}F_\nu(g\begin{pmatrix}p1_n & A\\ & 1\end{pmatrix})=\lambda F_\nu(g)$. ここで $A\in\mathrm{M}_n(\mathbf{Z})$ は, $\mathrm{M}_n(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ の代表系を走る.

4. Sketch of proof of Main Theorem

4.1. **Recipe of Measure.** $e\in\mathbf{Z}_{\ge1}, f:=p^e$ とし,

$$C^*_{\varepsilon.f}=\left\{\begin{pmatrix}g_1 & \\ & g_2\end{pmatrix}\in H(\mathbf{A});\det g_1g_2^{-1}\in\mathbf{Q}^\times\mathbf{R}_{>0}(\varepsilon+f\mathbf{Z}_p)\widehat{\mathbf{Z}}^{(p)\times}\right\}\ (\varepsilon\in\mathbf{Z}_p^\times),\quad C_{\varepsilon.f}=Z(\mathbf{A})H(\mathbf{Q})\backslash C^*_{\varepsilon,f}$$

とおく. $A\in\mathrm{M}_n(\mathbf{Z}_p)$ に対して, 値 $\mathcal{PZ}(A,f),\kappa$ を次で定める:

$$\mathcal{PZ}(A,f)=\int_{C_{1,f}}\varphi(\begin{pmatrix}g_1 & \\ & g_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1_n & Af^{-1}\\ & 1_n\end{pmatrix})\eta^{-1}(g_2)dg_1dg_2,\quad\kappa=p^{-n^2}\lambda.$$

Definition 4.1. $a \in \mathbf{Z}_p^\times, f = p^e (e \geq 1)$ に対し, $\mu(a + f\mathbf{Z}_p) = \kappa^{-e}\mathcal{PZ}(\mathrm{diag}(a, 1, \dots, 1), f)$ と定める.

Proposition 4.2. (Birch Lemma) $A = \mathrm{diag}(a, 1, \dots, 1)$ とおく. このとき,

$$\sum_{a \in (\mathbf{Z}/f\mathbf{Z})^\times} \chi(a)\mathcal{PZ}(A, f) = \mathcal{Z}(\frac{1}{2}, \begin{pmatrix} 1_n & f^{-1}1_n \\ & 1_n \end{pmatrix} \cdot \varphi, \chi).$$

Remark 4.3. Distribution の定義, Birch の補題, 素点 p での局所 Shalika 模型の一意性より, 次が成り立つ: ([AG94, page 40, (DR)] より, μ は Distribution を定める.)

$$\int_{\mathbf{Z}_p^\times} \chi(a)d\mu(a) = \kappa^{-e}\mathcal{Z}(\frac{1}{2}, \begin{pmatrix} 1_n & f^{-1} \\ & 1_n \end{pmatrix} \cdot \varphi, \chi) = \kappa^{-e}L^{(p\infty)}(\frac{1}{2}, \pi)\mathcal{Z}_\infty(\frac{1}{2}, \varphi_\infty, 1)\mathcal{Z}_p(\frac{1}{2}, \begin{pmatrix} 1_n & f^{-1} \\ & 1_n \end{pmatrix} \cdot H_{F_\nu}, \chi_p).$$

4.2. Proof of Theorem 2.1. 次の命題を示せば良い:

Proposition 4.4.
(i) (Distribution property)([AG94, page 40, (DR)]) $\mu(a + f\mathbf{Z}_p) = \sum_{\alpha \bmod p} \mu(a + \alpha f + pf\mathbf{Z}_p)$.
(ii) (Interpolation property) $\mathcal{Z}_p(\frac{1}{2}, \begin{pmatrix} 1_n & f^{-1} \\ & 1_n \end{pmatrix} \cdot H_{F_\nu}, \chi_p) = C_{n,p} \times L(\frac{1}{2}, \pi_p \otimes \chi_p) \times E(\pi_p, \chi_p)$.
(iii) (Boundedness) 適当な代数体 E の整数環 $\mathcal{O}_E$ と, 非零の複素数 $\Omega(\pi)$ が存在して, $\frac{\mu}{\Omega(\pi)}$ は, $\mathcal{O}_E \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}_p$ 値と見做せる.

Proof. (i): 次の等式より, 導かれる ([AG94, Lemma 2.1]): $\lambda\mathcal{PZ}(A, f) = p \sum_{X \bmod p} \mathcal{PZ}(A + fX, pf)$.
(ii): [AG94, Section 2.2, 2.3] で"直接計算"が与えられている.
(iii) ([AG94, Section 5.3]): $\{|\mu(a + f\mathbf{Z}_p)|_p\}_{a \in \mathbf{Z}_p^\times, e \geq 1}$ $(f = p^e)$ が有界であることを示せば良い. L を $\mathrm{GL}_{2n}(\widehat{\mathbf{Q}})$ の開コンパクトな部分群で, φ は右 L-不変, $L_p = \mathrm{GL}_{2n}(\mathbf{Z}_p)$ かつ, 適当な有限素点 $v \neq p$ に対し, L_v は 4-トーションを持たないとする. $g^{(e)} \in G(\mathbf{A})$ を, $g_v^{(e)} = 1_{2n}$ $(v \neq p), g_p^{(e)} = \begin{pmatrix} 1_n & Af^{-1} \\ & 1_n \end{pmatrix}$ $(A = \mathrm{diag}(a, 1, \dots, 1))$ とし,

$$\pi : G(\mathbf{A}) \to S_G(L) := G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{A})/K_\infty^\circ L, \quad M(L, e) := \pi(C_{1,f}^* g^{(e)})$$

と定め, Eichler-志村写像による φ の $H^{n^2+n-1}(S_G(L), \mathbf{C})(\cong H^{n^2+n-1}(\mathfrak{g}, K_\infty^\circ, V_\pi)^L)$ での像を α_φ とかく. $K_\infty^H = K_\infty^\circ \cap H(\mathbf{R})$ とおくと, 次を得る:

$$\mu(a + f\mathbf{Z}_p) = \frac{p^{en^2}}{\lambda^e}\mathcal{PZ}(A, f) = \frac{1}{\lambda^e} \cdot p^{en^2}\mathrm{vol}(d\nu, g^{(e)}L(g^{(e)})^{-1} \cap H(\mathbf{A}_f)K_\infty^H) \cdot \int_{M(L,e)} \alpha_\varphi.$$

ただし, $d\nu$ は適当な $H(\mathbf{A}_f) \times K_\infty^H$ の測度. (Ord) より, λ は p 進単数. また [AG94, page 59, Claim] より, $\left\{|p^{en^2}\mathrm{vol}(d\nu, g^{(e)}L(g^{(e)})^{-1} \cap H(\mathbf{A}_f)K_\infty^H)|_p\right\}_{a \in \mathbf{Z}_p^\times, e \geq 1}$ は有界. "homology 群の有限生成性"より, $\left\{|\int_{M(L,e)} \alpha_\varphi|_p\right\}_{a \in \mathbf{Z}_p^\times, e \geq 1}$ も有界. これより, μ の有界性が示せた. □

References

[AG94] A. Ash and D. Ginzburg, *p-adic L-functions for* GL(2n), Invent. Math., **116**, (1994), 27–73.
[FJ93] S. Friedberg and H. Jacquet, *Linear periods*, J. Reine Angew. Math., **443**, (1993), 91–139.
[Ge] L. Gehrmann, *On Shalika models and p-adic L-functions*, preprint, arXiv:1511.01771.
[GRG14] H. Grobner, A. Raghuram, *On the arithmetic of Shalika models and the critical values of L-functions for* GL_{2n} (with appendix by W. T. Gan), Amer. J. Math., **136**, No. 3, (2014), 675–728.
[JR96] H. Jacquet and S. Rallis, *Uniqueness of linear periods*, Compositio Math., **102**, No. 1, (1996), 65–123.
[Ni09] C. Nien, *Uniqueness of Shalika models*, Canad. J. Math., **61**, No. 6, (2009), 1325–1340.
[PSR88] I. Piatetski-Shapiro and S. Rallis, *A new way to get Euler products*, J. reine angew. Math., **392**, (1988), 110–124.
[Ro84] D. Rohrlich, *On L-functions of elliptic curves and cyclotomic towers*, Invent. Math. **75**, (1984), 409–423.
[Su] B. Sun, *Cohomologically induced distinguished representations and cohomological test vectors*, preprint, arXiv:1111.2636.

Department of Mathematics, School of Engineering, Tokyo Denki University, 5, Asahicho, Senju, Adachi city, Tokyo, 120-8551, Japan
E-mail address: namikawa@mail.dendai.ac.jp