On mod p non-vanishing of special values of L-functions associated to modular forms over imaginary quadratic fields

並川 健一 (大阪大学)

概 要

p を素数とし, f を類数が 1 の虚二次体上の $GL(2)$ の尖点形式とする. このとき, ある有限位数の Hecke 指標 φ が存在して, $f\otimes\varphi$ の L 関数の 1 での特殊値の代数部分が p 進単数となることが示せたので, これについて解説をする. これは有理数体上の場合の, [A-S], [O-P] により知られていたことの類似である.

1 導入

p を素数とする. このとき 体としての同型 $\overline{\mathbf{Q}}_p\cong\mathbf{C}$ および, $\overline{\mathbf{Q}}$ の $\overline{\mathbf{Q}}_p$ への埋め込みを固定する.

Ash-Stevens は, 与えられた素数 p と, $\Gamma_1(N):=\{\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\in SL_2(\mathbf{Z}); c\equiv 0, d\equiv 1 \mod N\}$ の楕円尖点形式 f に対して, ある Dirichlet 指標 φ が存在して, f の標準 L 関数の Dirichlet 指標による twist $L(s,f\otimes\varphi)$ の, $s=1$ での特殊値の代数部分が, p で割れないことを示した ([A-S, Th.4.5(c)] , [Va, Remark1.12]).

この結果の類似として, 類数が 1 の虚二次体上の $GL(2)$ の重さが (2,2) の尖点形式に対して次の結果を得た.

F を虚二次体, $\mathcal{O}_F$ をその整数環, D で $F/\mathbf{Q}$ の判別式をあらわす. $\mathfrak{N}$ を F の整イデアル, p で素数をあらわす. このとき次を仮定する.

$$(\mathfrak{N},p\mathcal{O}_F)=1, [\mathbf{Z}:\mathfrak{N}\cap\mathbf{Z}]>3, p\nmid \mathcal{O}_F^\times|D|.$$

Theorem 1.1. (主定理) F の類数が 1 とする. $f\in S_{(2,2)}(\mathfrak{N})$ に対し, ある位数有限の Hecke 指標 φ が存在して, $\dfrac{L(1,f\otimes\varphi)}{2(2\pi)^2\Omega_f}$ は p 進単数. ($S_{(2,2)}(\mathfrak{N})$ は 2 節, Ω_f は 3 節を参照する.)

本稿の構成は以下の通り. 2 節で虚二次体上の尖点形式の定義など基本事項を復習する. 3 節で L 関数の特殊値の積分表示および整数性について述べる. 得られている結果は類数が 1 の虚二次体に対するものであるが, 2, 3 節では類数が一般のものを記述した. 4 節では上記の定理の証明の概略を与える.

記号を次の様に定めておく.

F は虚二次体, $\mathcal{O}_F$ は F の整数環をあらわす. $F_{\mathbf{A}}^\times$ で F のイデールをあらわし, $F_{\mathbf{A},\infty}^\times, F_{\mathbf{A},f}^\times$ で, それぞれ F のイデールの無限成分, 有限成分をあらわす. $\hat{\mathcal{O}}_F:=\mathcal{O}_F\otimes_{\mathbf{Z}}\hat{\mathbf{Z}}$ とおく. $F/\mathbf{Q}$ のガロア群を $\mathrm{Gal}(F/\mathbf{Q})=\{id,c\}$ とかき, c は複素共役をあらわす. ζ_p で 1 の原始 p 乗根をあらわす.

2 虚二次体上の $GL(2)$ の尖点形式

この節では、虚二次体上の $GL(2)$ の尖点形式の定義を与え、その Fourier 展開を記述する. 2 節と 3 節についての詳細は [Hi], [Ur] を参考に挙げておく.

$\kappa:=(n_{id}+2,n_c+2)\in(\mathbf{Z}_{\geq 2})^2$ とし, $n^*:=n_{id}+n_c+2$ とおく. まず $L(n^*;\mathbf{C})$ を次数 n^* 次の 2 変数斉次同次式のなす $\mathbf{C}$ 加群とする. すなわち $L(n^*;\mathbf{C})=\langle S^{n^*},\cdots,ST^{n^*-1},T^*\rangle_{\mathbf{C}}$ と表せる.

Definition 2.1. C^∞ 関数 $f:GL_2(F_{\mathbf{A}})\to L(n^*,\mathbf{C})$ が $GL_2(F_{\mathbf{A}})$ に対する重さ κ, レベル $\mathfrak{N}$ の尖点形式であるとは, f が次を満たすときをいう;

(i) $\sigma=id,c$ に対して, $D_\sigma f=(\frac{n_\sigma^2}{2}+n_\sigma)f$. ここで D_σ は Casimir 作用素をあらわす.

(ii) $\gamma\in GL_2(F), z\in\mathbf{C}^\times\subset F_{\mathbf{A}}^\times$ に対して, $f(\gamma zg,\left(\begin{smallmatrix}S\\T\end{smallmatrix}\right))=z^{-n_{id}}\overline{z}^{-n_c}f(g,\left(\begin{smallmatrix}S\\T\end{smallmatrix}\right))$. ここで $F_{\mathbf{A}}^\times$ は $GL_2(F_{\mathbf{A}})$ の中心と同一視する.

(iii) $u=u_\infty u_f\in U_2(\mathbf{C})K_1(\mathfrak{N})$ に対して, $f(gu,\left(\begin{smallmatrix}S\\T\end{smallmatrix}\right))=f(g,u_\infty\left(\begin{smallmatrix}S\\T\end{smallmatrix}\right))$.

(iv) $g \in GL_2(F_{\mathbf{A}})$ に対して, $\displaystyle\int_{U(\mathbf{Q})\backslash U(F_{\mathbf{A}})} f(vg, (\begin{smallmatrix} S \\ T \end{smallmatrix}))du = 0$. ここで $U(\mathbf{Q}) := \{v = (\begin{smallmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}); u \in F\}$, $U(F_{\mathbf{A}}) := \{v = (\begin{smallmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}); u \in F_{\mathbf{A}}\}$ とおいた.

尖点形式のなす空間を $S_\kappa(\mathfrak{N})$ とかく.

次に $f \in S_\kappa(\mathfrak{N})$ の Fourier 展開を記述する. そのために Bessel 関数 K_α を定義する.

$$\frac{d^2K_\alpha}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dK_\alpha}{dx} - (1 + \frac{\alpha^2}{x^2})K_\alpha = 0, \quad K_\alpha(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}}e^{-x} \text{ as } x \to \infty.$$

Whittaker 関数 $W : \mathbf{C}^\times \to L(n^*; \mathbf{C})$ を次で定める.

$$W_\kappa(y) := \sum_{\alpha=0}^{n^*} \binom{n^*}{\alpha} (\frac{y}{\sqrt{-1}|y|})^{n_c+1-\alpha} K_{\alpha-(n_c+1)}(4\pi|y|) S^{n^*-\alpha}T^\alpha.$$

Proposition 2.2. ([Hi, Theorem6.1]) $\mathscr{I}$ を F の分数イデアルのなす群とする. $\mathbf{e}_F : F_{\mathbf{A}}/F \to \mathbf{C}$ を加法的指標とし, $z \in F_{\mathbf{A},\infty}$ に対し $\mathbf{e}_F(z) = \exp(2\pi\sqrt{-1}\mathrm{Tr}_{F/\mathbf{Q}}(z))$ なるものとする. このとき $f \in S_\kappa(\mathfrak{N})$ に対し, Macro 1 次を満たす関数 $\mathbf{a} : \mathscr{I} \times S_\kappa(\mathfrak{N}) \to \mathbf{C}$ が存在する.

(i) $\mathbf{a}$ は F の整イデアル以外の上では 0 となる.

(ii) $f\left(\begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = |y|_{\mathbf{A}} \displaystyle\sum_{\xi \in F^\times} \mathbf{a}(\xi y\delta; f)W_\kappa(\xi y_\infty)\mathbf{e}_F\xi z$. ここで δ は $F/\mathbf{Q}$ の different をあらわす. また $\xi y\delta$ はイデアルをあらわす.

強近似定理により, 次のような非交和分解がある;

$$GL_2(F_{\mathbf{A}}) = \coprod_{i=1}^{h} GL_2(F)t_iU_2(\mathbf{C})K_1(\mathfrak{N}).$$

ここで $t_i = (\begin{smallmatrix} a_i & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix})$, $a_i \in F_{\mathbf{A},f}$ は $a_{i,\mathfrak{N}} = 1$ を満たすように取れる. また h は F の類数である. このとき

$$\Gamma_1^i(\mathfrak{N}) := GL_2(F) \cap t_iGL_2(\mathbf{C})K_1(\mathfrak{N})t_i^{-1}.$$

とおく.

次に注意する.

$$\begin{aligned} Y_1(\mathfrak{N}) :&= GL_2(F)\backslash GL_2(F_{\mathbf{A}})/U_2(\mathbf{C})K_1(\mathfrak{N})\mathbf{C}^\times \\ &= \coprod_{i=1}^{h} (GL_2(F) \cap t_iGL_2(\mathbf{C})K_1(\mathfrak{N})t_i^{-1})\backslash GL_2(\mathbf{C})/U_2(\mathbf{C})\mathbf{C}^\times. \end{aligned}$$

ここで $\Gamma_1^i(\mathfrak{N}) := GL_2(F) \cap t_iGL_2(\mathbf{C})K_1(\mathfrak{N})t_i^{-1}, Y_1^i(\mathfrak{N}) := \Gamma_1^i(\mathfrak{N})\backslash GL_2(\mathbf{C})/U_2(\mathbf{C})\mathbf{C}^\times$ とおく.

このとき次は同相である.

$$GL_2(\mathbf{C})/U_2(\mathbf{C})\mathbf{C}^\times \cong \mathscr{H} := \left\{\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}; x \in \mathbf{C}, y \in \mathbf{R}_{>0}\right\}.$$

3 L 関数の特殊値の積分表示

この節では、Eichler-Shimura-Harder の同型、周期の定義、L 関数の特殊値の整数性について記述する。

まず Eichler-Shimura-Harder 同型を述べるために, $Y_1(\mathfrak{N})$ 上の局所系を定義する. $n := (n_{id}, n_c) \in (\mathbf{Z}_{\geq 0})^2$ をとる. まず $L(n_{id}; \mathbf{C}), L(n_c; \mathbf{C})$ を 2 節と同様に定め, 変数をそれぞれ X, Y, X_c, Y_c とかく. $GL_2(\mathbf{C})$-加群

$L(n_{id};\mathbf{C})\otimes L(n_c;\mathbf{C})$ に $GL_2(\mathbf{C})$ 加群の構造を次で定める．$\gamma=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\in GL_2(\mathbf{C})$, $P(\begin{pmatrix} X \\ Y\end{pmatrix})\in L(n_{id};\mathbf{C})$, $P_c(\begin{pmatrix} X_c \\ Y_c\end{pmatrix})\in L(n_c;\mathbf{C})$ に対して,

$$(\gamma\cdot P\otimes P_c)(\begin{pmatrix} X \\ Y\end{pmatrix},\begin{pmatrix} X_c \\ Y_c\end{pmatrix}):=P(\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y\end{pmatrix})\otimes P_c(\begin{pmatrix} \overline{d} & -\overline{b} \\ -\overline{c} & \overline{a}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y\end{pmatrix}).$$

$L(n_{id};\mathbf{C})\otimes L(n_c;\mathbf{C})$ を $GL_2(\mathbf{C})$ 加群とみなしたものを $L(n;\mathbf{C})$ と書く．同様にして, $GL_2(\mathcal{O}_F)$ 加群 $L(n;\mathcal{O}_F)$ などを定義しておく.

$L_i(n;\mathcal{O}_F):=L(n;F)\cap t_i\cdot L(n;\hat{\mathcal{O}}_F)$ とおき, $\Gamma_1^i(\mathfrak{N})$ 加群とみなす．また $\mathcal{O}_F$ 代数 A に対し, $L_i(n;A):=L_i(n;\mathcal{O}_F)\otimes_{\mathcal{O}_F}A$ とおく．このとき $Y_1^i(\mathfrak{N})$ の局所系 $\mathscr{L}_i(n;A)$ を, 第一成分の射影

$$\Gamma_1^i(\mathfrak{N})\backslash(GL_2(\mathbf{C})/U_2(\mathbf{C})\mathbf{C}^\times\times L_i(n;A))\to\Gamma_1^i(\mathfrak{N})\backslash(GL_2(\mathbf{C})/U_2(\mathbf{C})\mathbf{C}^\times)=Y_1^i(\mathfrak{N})$$

の section として定義する．ここで $L_i(n;A)$ には離散位相を入れておく．$Y_1^i(\mathfrak{N})$ に局所系が定義できたので, これを用いて $Y_1(\mathfrak{N})$ に局所系 $\mathscr{L}(n;A)$ を定義しておく.

Remark 3.1. 群コホモロジーとの間に同型を作るために, $[\mathbf{Z}:\mathfrak{N}\cap\mathbf{Z}]>3$ なる条件を仮定する．このとき $\Gamma_1^i(\mathfrak{N})\cap SL_2(F)$ はトーションを持たない ([Ur, §2.3]).

Eichler, Shimura, Harder により次の同型写像が存在する.

Theorem 3.2. (Eichler-Shimura-Harder) $\delta:S_\kappa(\mathfrak{N})\to H_p^1(Y_1(\mathfrak{N}),\mathscr{L}(n;\mathbf{C}))$ は Hecke 加群として同型．ここで H_p^* は parabolic コホモロジーを表す.

この同型を用いて, 周期の定義を行う．$\mathfrak{p}$ を F の有限素点とし, $f\in S_\kappa(\mathfrak{N})$ を正規 Hecke 固有形式とする ($\mathbf{a}(\mathcal{O}_F;f)=1$)．$f|_{T(\mathfrak{a})}=\lambda_f(T(\mathfrak{a}))f$ とおく．$K:=\cup_{\mathfrak{a}\subset\mathcal{O}_F}F(\lambda_f(T(\mathfrak{a})))$. $\mathcal{O}_{K,\mathfrak{P}}$ で $\mathfrak{P}|\mathfrak{p}$ に対する K の整数環の完備化をあらわす .

Proposition 3.3. ([Hi, §8])

(i) $H_p^1(Y_1(\mathfrak{N}),\mathscr{L}(n;\mathbf{C}))\cong H_p^1(Y_1(\mathfrak{N}),\mathscr{L}(n;\mathcal{O}_{K,\mathfrak{P}}))\otimes_{\mathcal{O}_{K,\mathfrak{P}}}\mathbf{C}$.

(ii) λ_f-固有空間 $H_p^1(Y_1(\mathfrak{N}),\mathscr{L}(n;\mathcal{O}_{K,\mathfrak{P}}))'[\lambda_f]$ は階数 *1* の自由 $\mathcal{O}_{K,\mathfrak{P}}$-加群, ここで $H_p^1(*)'$ は $H_p^1(*)$ の自由部分をあらわす.

$H_p^1(Y_1(\mathfrak{N}),\mathscr{L}(n;\mathcal{O}_{K,\mathfrak{P}}))'[\lambda_f]$ の $\mathcal{O}_{K,\mathfrak{P}}$ 上の基底を η_f と表す．η_f は p 進単数のずれを除いて一意的に決まる．このとき f の周期 $\Omega_f\in\mathbf{C}$ を $\delta(f)=\Omega_f\eta_f$ によって定める.

次に L 関数の特殊値の整数性について述べる.

$\varphi:F_{\mathbf{A}}^\times\to\mathbf{C}^\times$ を位数有限の Hecke 指標とする．$\mathfrak{c}$ を φ の導手とし, $\mathfrak{c}$ に対応する $F_{\mathbf{A},f}$ の元を $\varpi_\mathfrak{c}$ とおく (すなわち $\mathfrak{c}=\varpi_\mathfrak{c}\mathcal{O}_F$)．このとき $f\in S_\kappa(\mathfrak{N})$ に対し,

$$f|_{R(\varphi)}(x):=\varphi(\det(x))\sum_{u\in R}\varphi_\mathfrak{c}(\varpi_\mathfrak{c}u)f(x\alpha(u))$$

とおくと, $f|_{R(\varphi)}\in S_\kappa(\mathfrak{N}\cap\mathfrak{c}^2)$ となる．ここで R は $(\mathfrak{c}^{-1}/\mathcal{O}_F)^\times$ の代表系をあらわす ($(\mathfrak{c}^{-1}/\mathcal{O}_F)^\times$ の定義は [Hi, §6] を参照).

L 関数 $L(s,f\otimes\varphi)$ を次で定める.

$$L(s,f\otimes\varphi):=\sum_{\mathfrak{a}\subset\mathcal{O}_F}\lambda_f(T(\mathfrak{a}))\varphi(\mathfrak{a})\sharp(\mathcal{O}_F/\mathfrak{a})^{-s}.$$

$\Delta_i:E:=\mathbf{C}^1\backslash\mathbf{C}^\times\to Y_1^i(\mathfrak{N});a\mapsto\begin{pmatrix} |a| & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$ とおく ($\mathbf{C}^1:=\{z\in\mathbf{C};|z|=1\}$)．また

$$\delta(f)=\sum_{j_{id}=0,j_c=0}^{n_{id},n_c}\delta_{j_{id},j_c}(f)X^{n_{id}-j_{id}}Y^{j_{id}}X_c^{n_c-j_c}Y_c^{j_c}\in H_p^1(Y_1,\mathscr{L}(n;\mathbf{C}))$$

とかく．このとき L 関数の積分表示は次のようになる.

Proposition 3.4. 記号は上の通りとする.

$$\sum_{i=1}^{h}\int_E \Delta_i^*\delta_{0,0}(f|_{R(\varphi)}) = (-1)^{n_{id}+1}2^{-1}(2\pi)^{-2}\sharp\mathcal{O}_F^\times G(\varphi)|D|L(1,f\otimes\varphi).$$

ここで $G(\varphi)$ は φ で定まる Gauss 和をあらわす. また D は $F/\mathbf{Q}$ の判別式をあらわす.

上記の積分を $\Omega_f\eta_f|_{\widetilde{R(\varphi)}}$ と E との cap 積とみなすことにより次を得る. ($\widetilde{R(\varphi)}$ は $R(\varphi)$ が誘導するコホモロジーの間の写像.)

Theorem 3.5. $(\mathfrak{c},\mathfrak{p})=1$ とする. このとき

$$(-1)^{n_{id}+1}2^{-1}(2\pi)^{-2}\sharp\mathcal{O}_F^\times G(\varphi)|D|L(1,f\otimes\varphi)\in\mathcal{O}_{K,\mathfrak{P}}[\varphi].$$

ここで, $\mathcal{O}_{K,\mathfrak{P}}[\varphi]$ は $\mathcal{O}_{K,\mathfrak{P}}$ に $\varphi(\hat{\mathcal{O}}_F^\times)$ の値を添加した環をあらわす.

4 証明の概略

主定理の証明の概略を説明する. 大筋は [A-S], [St] の類似である. ただし [St] には誤りがみられる ([O-P]).

この節から F の類数は 1 であるとし, $(p,\mathfrak{N})=1$ とする. ($(n_{id},n_c)=(0,0)$ に注意する.) 以下 φ は位数有限の Hecke 指標で, 導手 $\mathfrak{c}$ が $\mathfrak{N}$ とは互いに素となるものを考える.

Lemma 4.1. (1)$Y_1(\mathfrak{N})^*$ を $Y_1(\mathfrak{N})$ の Borel-Serre コンパクト化とする. ある $c_\varphi\in H_1(Y_1(\mathfrak{N})^*,\mathcal{O}_{K,\mathfrak{P}}[\varphi])$ が存在して次を満たす.

$$\eta_f|_{\widetilde{R(\varphi)}}\cap E=\eta_f\cap c_\varphi.$$

(2)$\mathfrak{M}$ を $\mathfrak{N}|\mathfrak{M}$ となる $\mathcal{O}_F$ のイデアルとする. このとき $\Gamma^i(\mathfrak{N})$ は, $\Gamma^i(\mathfrak{M})$ と $\Gamma^i(\mathfrak{N})$ の放物元で生成される.

ここで $\overline{\mathbf{Z}}$ で代数的整数全体をあらわし, $\bar{\mathfrak{p}}$ を $\mathfrak{P}$ の上にある素イデアルとする.

cup 積と Poincare 双対性を用いると η_f は自然に $\mathrm{Hom}(H_1(Y_1(\mathfrak{N})^*,\overline{\mathbf{F}}_p),\overline{\mathbf{F}}_p)$ の元 Φ_f を定める ([Ur, §1]). $H^1(\partial Y_1(\mathfrak{N})^*,\mathcal{O}_{K,\mathfrak{P}}[\varphi])$ がトーションを持たないこと ([Ur, prop.2.4.1]) から, $\Phi_f\neq 0$ であることが示せる. また $\Phi_f(c_\varphi)$ は L 関数の特殊値の $\overline{\mathbf{F}}_p$ への像に等しい. よって主定理の証明のためには, ある Hecke 指標 c_φ が存在して $\Phi_f(c_\varphi)\neq 0$ を示せばよい.

次の $(*)$ を仮定して, $\Phi_f=0$ を示し, 矛盾を導く.

$(*)$ この節の最初に述べた条件を満たす任意の Hecke 指標 φ に対して, $\Phi_f(c_\varphi)=0\in\overline{\mathbf{F}}_p$.

$Y_1(\mathfrak{N})^*=\Gamma_1^1(\mathfrak{N})\backslash\mathscr{H}^*$ より, 次の全射準同型が存在する. ($\mathscr{H}^*$ の定義は [Ur, §2.3] を参照する. 以下 $\Gamma_1(\mathfrak{N}):=\Gamma_1^1(\mathfrak{N})$ とおく.)

$$pr:\Gamma_1(\mathfrak{N})\to H_1(Y_1(\mathfrak{N})^*,\overline{\mathbf{F}}_p)/H_1(\partial Y_1(\mathfrak{N})^*,\overline{\mathbf{F}}_p);\gamma\mapsto\{0,\gamma\cdot 0\}.$$

ここで $\{0,\gamma\cdot 0\}$ は, $\mathscr{H}^*$ 内の 0 と $\gamma\cdot 0$ とを結ぶ path の定める 1-cycle である. ($\partial\mathscr{H}^*$ の 0 を含む連結成分 $\mathscr{H}_0^*$ は $\mathbf{C}$ に同相なので, $0\in\mathscr{H}^*$ は, $0\in\mathbf{C}\cong\mathscr{H}_0^*\subset\mathscr{H}^*$ とみなしている.) また f が尖点形式であることより, $\Phi_f(H_1(\partial Y_1(\mathfrak{N})^*,\overline{\mathbf{F}}_p))=\{0\}$. よって $\Phi_f\circ pr$ が定義できる. このとき $\Phi_f\circ pr=0$ を示せばよい.

$F(\zeta_p)/F$ の導手を $\mathfrak{M}_p$ とかく. すると仮定より $\mathfrak{M}_p$ と $\mathfrak{N}$ は互いに素となる. $\mathfrak{M}:=\mathfrak{M}_p\mathfrak{N}$ とおく. このとき **Lemma4.1**(2) より, $(\Phi_f\circ pr)(\Gamma_1(\mathfrak{M}))=\{0\}$ を示せばよい.

任意の $\gamma=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\in\Gamma_1(\mathfrak{M})$ をとる. $(\Phi_f\circ pr)(\gamma)=0$ を示せばよい. 容易に $b\mathcal{O}_F$ と $\mathfrak{M}_p$ が互いに素な場合に帰着できるので, 以下これを仮定する.

Lemma 4.2. 次を満たす素元 $\pi \in \mathcal{O}_F$ は, 無限に存在する.

$$\text{(i)}[\mathcal{O}_F : \pi\mathcal{O}_F] - 1 \in \mathbf{F}_p^\times, \quad \text{(ii) } \pi - 1 \in \mathfrak{N}, \quad \text{(iii) } \{0, \tfrac{b}{d}\} = \{0, \tfrac{b}{\pi}\}.$$

Lemma4.2 における $\pi \in \mathcal{O}_F$ をとる. Hecke 指標の集合を次で定める: $H_\pi := \{\varphi; F_{\mathbf{A}}^\times \to \mathbf{C}^\times; \varphi|_{F_{\mathbf{A},\infty}} = 1, \mathrm{cond}\varphi \mid \pi\mathcal{O}_F\}$. また $m := \sharp H_\pi$ とおく. $\pi\mathcal{O}_F$ と $b\mathcal{O}_F$ が互いに素, および $m > 1$ なるように π が取れるので, これを仮定しておく. **Lemma4.2** より m と p は互いに素である. ここで仮定 $(*)$ と [St, Th.2.1] と同様の議論により, $k \in \mathcal{O}_F$ で $k\mathcal{O}_F$ と $\pi\mathcal{O}_F$ が互いに素となるものに対して 次が分かる.

$$\Phi_f(\{0, \frac{k}{\pi}\}) = \frac{1}{m} \sum_{t \in (\mathcal{O}_F/\pi\mathcal{O}_F)^\times} \Phi_f(\{0, \frac{t}{\pi}\}) \in \overline{\mathbf{F}}_p.$$

特に, $\Phi_f(\{0, \frac{k}{\pi}\}) = \Phi_f(\{0, \frac{1}{\pi}\})$ がわかる.

Lemma4.2 より, $\pi = 1 + N(N \in \mathfrak{N})$ とかけることに注意すると, $\Phi_f(\{0, \gamma \cdot 0\}) = 0$ を示すことができる. 実際これは,

$$\begin{aligned} \Phi_f(\{0, \frac{b}{d}\}) &= \Phi_f(\{0, \frac{b}{\pi}\}) \\ &= \Phi_f(\{0, \frac{1}{1+N}\}) \\ &= \Phi_f \circ pr(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ N & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) \end{aligned}$$

となることと, $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ N & 1 \end{smallmatrix}\right)$ と $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ が $\Gamma_1(\mathfrak{N})$ の放物元であることから分かる.

参考文献

[A-S] A. Ash and G. Stevens, *Modular forms in characteristic ℓ and special values of their L-functions*, Duke Math J.**53** (1986),no. 3, 849-868.

[Hi] H. Hida, *On the critical values of L-functions of GL(2) and GL(2) × GL(2)* , Duke Math J.**74** (1994),no. 2, 431-528.

[O-P] T. Ochiai and K. Prasanna, *Two-variable Iwasawa theory for Hida families with complex multiplication*, in preparetion.

[St] G. Stevens, *The cuspiddal group and special values of L-functions*, Trans. Amer. Math. Soc.**291**(1985), no. 2, 519-550.

[Ur] E. Urban, *Formes automorphes cuspidales pour GL(2) sur un corps quadratique imaginare. Valeurs Spéciales de fonctions L et congruences* , Compositio Math.**99**(1995), no. 3, 283-324.

[Va] V. Vatsal, *Canonical periods and congruence formulae*, Duke Math J.**98** (1999),no. 2, 397-419.