

Serre と Hazewinkel による局所類体論についての注意

鈴木貴士*

講演時：京都大学理学研究科

本稿執筆時：The University of Chicago

2009 年 12 月 7 日

1 はじめに

Serre と Hazewinkel の局所類体論について簡単に解説 (2 章) した後, それに新しいアプローチを与える (3 章). また標数 0 の場合に $\mathcal{D}$ -加群版の命題も紹介する (4 章). 2 次元局所類体論もこの枠組みの下で議論する (5 章). 最後に今後の展望について述べる (6 章). 2-5 章はプレプリント [Suz] の紹介である. なお関連する文献においては, 完全環 (p 乗が同型) や完全スキームの枠組みで考えている事もある. 以下の解説では, 簡単のためこの事情を無視する.

謝辞. 素晴らしい勉強の機会を下さった講演者・参加者の皆様, 講演の機会を下さったオーガナイザーの皆様と, 僕の研究を支えて下さった加藤和也先生に感謝致します.

2 Serre と Hazewinkel の局所類体論

Serre は [Ser61] において, 剰余体が代数閉な完備離散付値体に対する局所類体論の類似を与えた. また剰余体を任意の完全体とした場合の一般化が, Hazewinkel により [DG70] の付録で論じられている. この章では, この理論の主定理を簡単に紹介する. ただしここでは等標数の場合のみ扱う. 以後の章においてはこの場合のみを扱うためである. Serre と Hazewinkel の理論自体は混標数の場合も扱っている.

k を標数 $p \geq 0$ の完全体とし, $K = k((T))$ と置き, $U_K = k[[T]]^\times$ を完備離散付値体 K の単数群とする. U_K は剰余体 k 上の可換副代数群 ($\mathbf{U}_K$ と書く) の構造を持つ. これを説明する. なお副代数群については [Ser60] で詳しく論じられている. k -代数 R に対し, $\mathbf{U}_K$ の R -有理点の成す群は次で与えられる:

$$\mathbf{U}_K(R) = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i \mathbf{T}^i \mid a_i \in R, a_0 \in R^\times \right\} = R[[\mathbf{T}]]^\times.$$

$\mathbf{U}_K$ は部分副代数群 $\mathbf{U}_K^n$ を持ち, その R -有理点の成す群は $1 + \mathbf{T}^n R[[\mathbf{T}]]$ である. それによる商 $\mathbf{U}_K / \mathbf{U}_K^n$ は, k 上の n 次元アフィン可換代数群となる. その n に関する逆極限として, $\mathbf{U}_K$ は副代数群を成している.

一般に k 上の可換副代数群 G に対し, その基本群 $\pi_1^{k\text{-gp}}(G)$ が考えられる ([Ser60], [DG70]). これは可換副有限群であり, k 上の可換副代数群から G への, 核 (Ker) が k 上の副代数群となる同種写像 (isogeny) を分類する.

* E-mail: suzuki@math.uchicago.edu, suzuki235711@gmail.com

以下が Serre と Hazewinkel の局所類体論の主定理である。

定理 2.1. 標準的な同型

$$\theta: \pi_1^{k\text{-gp}}(\mathbf{U}_K) \xrightarrow{\sim} I(K^{\text{ab}}/K)$$

が存在する。ただし右辺は K の最大 *abel* 拡大 K^{ab} の惰性群。

つまり K の *abel* 拡大と $\mathbf{U}_K$ への同種写像とが、本質的に一対一に対応する。なお k が有限体の時は、 $\pi_1^{k\text{-gp}}(\mathbf{U}_K)$ は通常の単数群 U_K と同型である。これは後述の命題 3.2 において触れる Lang 同種写像の核が U_K であるため。 k が有限体の時は、この同型の下で、上記の同型写像は通所の局所類体論に一致する。

同型写像 θ は次の様にして与えられる。 K の有限次完全分岐 *abel* 拡大 L に対し、 $\mathbf{U}_L$ も k 上の可換副代数群となり、ノルム写像 $\mathbf{U}_L \rightarrow \mathbf{U}_K$ が考えられる。その核について、割ると副定数群となる最大の部分群を考える。その群で $\mathbf{U}_L$ を割る事で、ノルム写像は $\mathbf{U}_K$ への同種写像を誘導する。これが θ により L に対応する同種写像である。

3 新しいアプローチ

前章の理論に対し、新しいアプローチを与える。定理 2.1 の同型の両辺は基本群の一種とも言えるので、基本群を取る前のスキームの段階で射を与えたい。

$K = k((T))$ は k -代数であるから、 $\mathbf{U}_K$ の K -有理点が考えられる。そこで有理点 $-T + \mathbf{T} \in \mathbf{U}_K(K) = K[[\mathbf{T}]]^\times$ を考える。ただし T は係数環 K の元であり、 $\mathbf{T}$ とは異なる。この K -有理点は k -スキームの射 $\text{Spec } K \rightarrow \mathbf{U}_K$ を与える。これを φ と置く。次の合成写像を η と置く：

$$I(K^{\text{ab}}/K) \hookrightarrow \text{Gal}(K^{\text{ab}}/K) \xrightarrow{\sim} \pi_1^{\text{ét}}(\text{Spec } K)^{\text{ab}} \xrightarrow{\varphi} \pi_1^{\text{ét}}(\mathbf{U}_K)^{\text{ab}} \twoheadrightarrow \pi_1^{k\text{-gp}}(\mathbf{U}_K).$$

ただし $\pi_1^{\text{ét}}$ はエタール基本群であり、 $\varphi: \text{Spec } K \rightarrow \mathbf{U}_K$ はエタール基本群の間に準同型をもたらしている。最後の全射は、(核が定数群である) 同種写像はエタールである事による。

この時次の定理を示す事が出来る。

定理 3.1. 1. 上記の準同型 $\eta: I(K^{\text{ab}}/K) \rightarrow \pi_1^{k\text{-gp}}(\mathbf{U}_K)$ は同型写像。

2. 更に k が、有限体、有限体の代数閉包、標数 0 の体、のいずれかである時、同型写像 η の逆写像は *Serre-Hazewinkel* の同型写像 θ に一致する。

構成より η は、 $\mathbf{U}_K$ への同種写像を $\varphi: \text{Spec } K \rightarrow \mathbf{U}_K$ で引き戻す事で K の *abel* 拡大を得るという写像である。こうして得られる *abel* 拡大は、与えられた同種写像による有理点 $-T + \mathbf{T}$ のファイバーの定義体である。主張 1 はこの対応が本質的に一対一である事を意味する。なおこの定理の主張 1 は、Deligne が Serre に宛てた手紙の中で本質的に示されている ([BE01])。この事に気付いたのは [Suz] を書き上げた後だった。ただしその手法は大域的であり、[Suz] のものとは異なる。また主張 2 において、言及されている体たち以外の完全体 k について、反例が見つかった訳ではない。

以下 3 章の終わりまで、定理 3.1 の証明について述べる。主張 1 について。各 $m \geq 1$ について、 $\mathbf{U}_K$ への m 次同種写像の φ による引き戻しと、 K の m 次拡大とが、本質的に一対一に対応する事を示せば良い。 m が p べきの時と p と互いに素な時に帰着される。 p べきの時は更に、 m がちょうど p の時に帰着される。 $\mathbf{U}_K$ は、べき級数の第 0 項が乗法群 $\mathbf{G}_m$ を成し、 $\mathbf{G}_m \times \mathbf{U}_K^1$ と直積分解される。 $\mathbf{G}_m$ への次数 p の (核が定数群である) 同種写像は自明なものしかないので、 $\mathbf{U}_K^1$ のみを考えれば良い。更に p 乗元の成す部分群で割っ

て $\mathbf{U}_K^1/(\mathbf{U}_K^1)^p$ を考えれば良い. この群へは, Artin-Hasse 指数関数による $\prod_{p \nmid n \geq 1} W / \prod_{p \nmid n \geq 1} pW$ からの同型写像が存在する. ここで W は無限長さの Witt ベクトルの成す副代数群. 後者の群から $\prod_{p \nmid n \geq 1} \mathbf{G}_a$ への自然な同型写像に, Artin-Hasse 指数関数の逆写像を合成したものは, 本質的にログ微分写像 dlog で与えられる. φ に, これらの同型写像を合成し, 更に n 番目の直積成分の $\mathbf{G}_a$ へ射影した射 $\mathrm{Spec} K \rightarrow \mathbf{G}_a$ は, dlog の簡単な計算により有理点 $1/nT^n$ に対応する事が分かる. こうして問題は, この有理点に対応する射 $\mathrm{Spec} K \rightarrow \mathbf{G}_a$ による, $\mathbf{G}_a$ への p 次同種写像の引き戻しの解析に帰着する. $\mathbf{G}_a$ への非自明 p 次同種写像は, Artin-Schreier 同種写像 $\wp(x) = x^p - x$ の a^{-1} 倍しかない ($a \in k^\times$). 従って $a^{-1}\wp(x) = 1/nT^n$ という方程式を解いて得られる Artin-Schreier 拡大が, 問題の K の拡大体である. Artin-Schreier 理論を用いた計算により, この場合の望む一対一対応が得られる. 次数 m が p と互いに素な時は, 馴分岐拡大に対する Kummer 理論を用いて, より簡単に処理される. この場合は直積分解 $\mathbf{U}_K \cong \mathbf{G}_m \times \mathbf{U}_K^1$ において, $\mathbf{G}_m$ 部分のみを考える事になる.

主張 2 では次の命題を用いる:

命題 3.2. k を位数 q の有限体 $\mathbb{F}_q$ とする. 次のカルテシアン図式が存在する:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec} K^{\mathrm{ram}} & \xrightarrow{\psi} & \mathbf{U}_K \\ \downarrow & & \downarrow F-1 \\ \mathrm{Spec} K & \xrightarrow{\varphi} & \mathbf{U}_K. \end{array}$$

ここで K^{ram} は, T 倍写像が $f(X) = TX + X^q$ であるような Lubin-Tate 群 ([Iwa86]) の原始 T^m 等分点 α_m を全て添加した体. ψ は有理点 $\sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{m+1} \mathbf{T}^m \in \mathbf{U}_K(K^{\mathrm{ram}})$ に対応. F は座標を q 乗する射 (Frobenius 射).

$F-1$ は Lang 同種写像と呼ばれ, $k = \mathbb{F}_q$ 上の副代数群に対し普遍被覆を与える. この命題により, 3 で定義した同型写像 η が Lubin-Tate 理論と結びつく. 一方 Lubin-Tate 理論は剰余有限体の局所類体論を与える. また Serre-Hazewinkel の局所類体論は, 剰余体が有限体の時は通常の局所類体論に一致していた. 従って同型写像 η と Serre-Hazewinkel の同型写像 θ が結びつく. こうして主張 2 が示される.

命題 3.2 は, 定理 3.1 の主張 1 と併せる事で, 等標数の Lubin-Tate 拡大に対する局所 Kronecker-Weber の定理の別証も与える: 命題 3.2 の図式の右の縦の写像は (k 上の副代数群としての) 普遍被覆を与えるのだから, η が同型である事より, 左の縦の写像も, 本質的に最も大きな abel 拡大でなければならない.

4 D-加群版

剰余体 k の標数 p が 0 の時は, 定理 2.1 ないしは定理 3.1 の同型は, 馴分岐拡大に対する Kummer 理論という初等的理論に帰着する. しかし $\mathcal{D}$ -加群を用いるとより強い結果を得る事が出来る. 背景には $\mathcal{D}$ -加群と Galois 表現の間の類似がある. $\mathcal{D}$ -加群については [谷崎 95] などを参照.

定理 4.1. k の標数は 0 とし, n を非負整数とする. 3 章で定義された射 $\varphi: \mathrm{Spec} K \rightarrow \mathbf{U}_K$ による引き戻しは, 以下の圏の間の圏同値をもたらす:

- $\mathbf{U}_K/\mathbf{U}_K^{n+1}$ 上の, 構造層上階数 1 で, 群構造と両立する $\mathcal{D}$ -加群の圏
- $\mathrm{Spec} K$ 上の, 構造層上階数 1 で, 不正則数 (irregularity) が n 以下の $\mathcal{D}$ -加群の圏

「群構造と両立」の定義は省略する。不正則数は微分方程式論におけるそれである。この定理も [BBDE] の未公開のプレプリントに含まれている。この定理は $n = 0$ (即ち確定特異点) の時、モノドロミーを取る事により定理 3.1 を導く。定理の証明は工夫を要しないので省略する。

5 2次元類似

以上の理論の類似を $K = k((S))((T))$ という体に対して考える。背景には高次元局所類体論 ([FK00]) がある。

K_2 を、2 次の代数的 K 群を取るという関手とする ([Bas73])。関手 $K_2[\mathbf{S}, \mathbf{T}]$ を、 k -代数 R に対し abel 群 $K_2(R[[\mathbf{S}, \mathbf{T}]])$ を与える関手とする。その K -有理点

$$\{-S + \mathbf{S}, -T + \mathbf{T}\} \in K_2[[\mathbf{S}, \mathbf{T}]](K) = K_2(k((S))((T))[[\mathbf{S}, \mathbf{T}]])$$

は関手間の射 $\varphi: \text{Spec } K \rightarrow K_2[[\mathbf{S}, \mathbf{T}]]$ を定める。ただし $\{\cdot, \cdot\}$ はシンボル写像。この φ を 3 章の $\varphi: \text{Spec } k((T)) \rightarrow \mathbf{U}_{k((T))}$ の類似と考える。

特に k を有限体 $\mathbb{F}_q$ とする。この時 $K = k((S))((T))$ は 2 次元局所体である。関手 X を以下のカルテシアン図式で定める：

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & K_2[[\mathbf{S}, \mathbf{T}]] \\ \downarrow & & \downarrow F-1 \\ \text{Spec } K & \xrightarrow{\varphi} & K_2[[\mathbf{S}, \mathbf{T}]]. \end{array}$$

ただし F は Frobenius 射。この時定理 3.1 や命題 3.2 を参考にして、以下のような事を期待したい：

- 関手 $K_2[[\mathbf{S}, \mathbf{T}]]$ は「一種の」代数群と見なせる。
- $F - 1$ による上記の有理点のファイバーの満たす方程式 $(F - 1)x = \{-S + \mathbf{S}, -T + \mathbf{T}\}$ は、 K に対する Lubin-Tate 理論の類似を与える。
- X は「Lubin-Tate 等分点」を全て K に添加した体 “ K^{ram} ” の Spec。
- K^{ram} は K の十分大きな abel 拡大を与える (「局所 Kronecker-Weber」)。

2 次元局所体に対する Lubin-Tate 理論の類似は、筆者の知る限り今の所存在しない。従ってこれらの期待は、そういった理論の構成を目指すものである。

これらの期待はいずれも、正確に定式化する事が困難である。そこで情報をいくらか落として現実的な部分分解を求める。 K_2 の代わりに 2 次微分形式の成す空間を考える。 k -代数 R に対し 2 次微分形式の成す abel 群 $\Omega_{R[[\mathbf{S}, \mathbf{T}]]/R}^2 = R[[\mathbf{S}, \mathbf{T}]]d\mathbf{S} \wedge d\mathbf{T}$ を対応させる関手 $\Omega_{[[\mathbf{S}, \mathbf{T}]]}^2$ は、可換副代数群で表現される。具体的には、 $\mathbf{S}^i \mathbf{T}^j d\mathbf{S} \wedge d\mathbf{T}$ ($i, j \geq 0$) を座標とする $\mathbf{G}_a$ の可算直積である。射 φ' を次で定める：

$$\varphi': \text{Spec } K \xrightarrow{\varphi} K_2[[\mathbf{S}, \mathbf{T}]] \xrightarrow{\text{dlog}} \Omega_{[[\mathbf{S}, \mathbf{T}]]}^2.$$

ただし dlog は代数的 K 理論の dlog 写像であり、シンボルで与えられる元 $\{f, g\}$ に対しては $\text{dlog}\{f, g\} = (df/f) \wedge (dg/g)$ となる。

この時次の命題を示す事が出来る。

命題 5.1. 次のカルテシアン図式が存在する：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec} A & \longrightarrow & \Omega_{[[\mathbf{s}, \mathbf{T}]]}^2 \\ \downarrow & & \downarrow F-1 \\ \mathrm{Spec} K & \xrightarrow{\varphi'} & \Omega_{[[\mathbf{s}, \mathbf{T}]]}^2. \end{array}$$

ここで $A = K[x_{ij} \mid i, j \geq 0] / (x_{ij}^q - x_{ij} - S^{-i-1}T^{-j-1})$.

この $\mathrm{Spec} A$ は X そのものではなく、体でもない。しかし A を定める方程式は Artin-Schreier 型なので、 A は K の abel 拡大の直積たちの合併となっている。これは前述の期待を支持するものと考えられる。

6 今後の展望

以下のような事が考えられる。まず $\Omega_{[[\mathbf{s}, \mathbf{T}]]}^2$ でなく K_2 で考える事。また $\mathcal{D}$ -加群版の定理 4.1 の 2 次元類似を考えたい。これは Galois 側では曲面上の $\mathcal{D}$ -加群の局所構造の問題である。[Suz] に僅かな計算例が書いてある。正標数では p 進微分方程式による類似を考えられるかもしれない。最後に、非可換化という方向性がある。つまり完全体 k と $K = k((T))$ に対し、abel 拡大ではなく、非可換拡大ないしは K の n 次元絶対 Galois 表現と、剰余体 k 上の無限次元の群 $GL_n(K)$ 上の何かとの対応である (cf. [Fre07]).

参考文献

- [Bas73] Hyman Bass, editor. *Algebraic K-theory. I: Higher K-theories*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 341. Springer-Verlag, Berlin, 1973.
- [BBDE] Alexander Beilinson, Spencer Bloch, Pierre Deligne, and Hélène Esnault. Periods for irregular connections on curves. preprint 2005.
- [BE01] Spencer Bloch and Hélène Esnault. Gauss-Manin determinants for rank 1 irregular connections on curves. *Math. Ann.*, Vol. 321, No. 1, pp. 15–87, 2001. With an appendix in French by P. Deligne.
- [DG70] Michel Demazure and Pierre Gabriel. *Groupes algébriques. Tome I: Géométrie algébrique, généralités, groupes commutatifs*. Masson & Cie, Éditeur, Paris, 1970. (Appendix: M. Hazewinkel, Corps de classes local).
- [FK00] Ivan Fesenko and Masato Kurihara, editors. *Invitation to higher local fields*, Vol. 3 of *Geometry & Topology Monographs*. Geometry & Topology Publications, Coventry, 2000. Papers from the conference held in Münster, August 29–September 5, 1999.
- [Fre07] Edward Frenkel. *Langlands correspondence for loop groups*, Vol. 103 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2007.
- [Iwa86] Kenkichi Iwasawa. *Local class field theory*. Oxford Science Publications. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1986. Oxford Mathematical Monographs.
- [Ser60] Jean-Pierre Serre. Groupes proalgébriques. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, Vol. 7, , 1960.
- [Ser61] Jean-Pierre Serre. Sur les corps locaux à corps résiduel algébriquement clos. *Bull. Soc. Math. France*, Vol. 89, pp. 105–154, 1961.

- [Suz] Takashi Suzuki. Some remarks on local class field theory of Serre and Hazewinkel. preprint 2009, [arXiv.org:0903.3099](https://arxiv.org/abs/0903.3099).
- [谷崎 95] 谷崎俊之, 堀田良之. D 加群と代数群. シュプリンガー現代数学シリーズ第 6 巻. シュプリンガー・フェアラーク東京, 1995.