# 保型表現と Galois 表現

—初学者のために—

吉田輝義

## 目 次



## 1 表現論の諸相 (1)

1970 年代から，代数的整数論は，表現論の言葉で書かれるようになった．現在の代数的整数論のもっとも中心的な問題の一つである**非可換類体論（Langlands 対応）**は，保型表現と Galois 表現の間の対応として定式化されている．表現論の言葉で書かれるようになった理由は，整数論が非可換な対象を本格的に扱う時代に入ったということである．代数的整数論を志す学生にとっては，可換環論，代数幾何，ホモロジー代数，位相群上の積分などが学習事項とされてきたが，表現論の重要性は十分に強調されてこなかったように思われる．筆者自身も，表現論の勉強が足りず自転車操業で勉強している次第だが，初学者の読者を念頭において「なぜ表現論が代数的整数論にとって不可欠なのか」を解説しながら，Langlands 対応の世界への案内を試みたいと思う．

定式化や研究対象の移行ということについて一言書いておく．Galois 理論以前は，代数学といえば方程式論であり，与えられた一変数あるいは多変数の多項式を四則演算で操作し，未知数を求めるという意味でそれらを「解く」，あるいはさまざまな多項式の間の関係を発見し記述する，という学問であった．しかし，5 次以上の方程式が根号では解けないことが証明され，根の間の有理的な関係の構造が「方程式の根の生成する拡大体の Galois 群」にすべて書き込まれていることがわかると，方程式論は「拡大体とその Galois 群を理解する」という新しい定式化を獲得した．とくに，方程式論が基礎体に決定的に依存することが明白になったことは，基礎体に依存する代数学（整数論との自然な統合，および任意のスキーム上の代数幾何）としての数論幾何の夜明けであったとも言える．この 19 世紀の「方程式論→拡大体・Galois 群」という変化と同じ規模のパラダイム・シフトが，20 世紀の数論幾何の発展を経て起こった．それが,「拡大体・Galois 群→ Galois 表現」という定式化・研究対象の移行であり，現在の代数的整数論の中心的な研究対象は Galois 表現である，と言ってしまっても過言ではないと思われる．この移行について解説するのが本稿の目的の一つである．

## 1.1 群の表現

代数的整数論の重要な目標の一つは，有理数体 $\mathbb{Q}$ の絶対 Galois 群 $G_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ を理解することであった．**Galois 表現**とは，この $G_{\mathbb{Q}}$（または代数体・局所体の絶対 Galois 群）の有限次元表現のことである（あとでいくつか自然な条件を課すことになるが）．そこで，群 $G$ の表現を研究することで，群 $G$ のことが理解できるのだ，いやむしろ，群 $G$ を理解するとは，その表現を理解することに他ならないのだ，という表現論の基本的なテーゼを学ぶ必要がある．

群の元の間の乗法表を書いたり，群を生成元と関係式で表したりすることよりも，その群の作用している空間を調べる方がわかりやすいのは,「対称性の抽象化」という群の本質に根ざす性質と言えるだろう．対称性そのものを体現するものとしての群という概念が抽出される遥か前から，対称性を持った代数的・幾何的対象（群の作用している集合・空間）はその対称性を用いて研究されていた．代数学においては対称式（3 次方程式の解法における Lagrange 分解式など）が，群の体への作用の表れであった．対称性のある数学的対象（群の作用する集合）から，その対称性の現れ方（集合の元など）を体系的に作り出していく過程で，群の表現の分類，という視点が整理されてきたのだと思われる．ここでは筆者の非力でうまい例をさらさらと出せないが，Lam による歴史的な解説 [Lam] などを参照されたい．

より現代的な視点からは，表現論の重要性は何と言っても理論の線形化にある．ブルバキはかなり早くから線形代数の重要性を強調したが，非可換・非線形な数学的対象を記述する上での線形代数の有用性が本当に明らかになったのは 1960 年代以降であった．もちろん，必ず体系的に解ける唯一の問題としての連立一次方程式，すなわち完全に信頼できる方法論としての線形代数の強みは周知の通りであろうから，ここでは圏論的な視点を強調しておく．線形代数（体 $K$ 上の有限次元ベクトル空間の理論）は，代数的構造の見通しのよい理解と操作のひな型となった．圏論の方法は，ここの数学的対象（集合とその元）を直接分析するよりも，それらの間の相互関係，つまり構造射の集合を理解しようとする．共通の構造を持った対象の全体（圏）という文脈の中に置くことによって，個々の対象の役割，ひいては本質がよく見える，という考え方である．古典的な数学的結果も，それが対象の具体的な表示の仕方に依存しない結果であれば，圏の性質，あるいは圏と圏の間の関手の性質として表現することができる．

体 $K$ を固定し，$K$ 上のあらゆる有限次元ベクトル空間のなす圏を $(\mathrm{Vect}/K)$ で表すことにしよう．圏 $(\mathrm{Vect}/K)$ の対象は $K$ 上の有限次元ベクトル空間であり，それらの間の射（構造射）は $K$ 線形写像である．この圏の対象の同型類は，次元という自然数の不変量で完全に決まる．つまり，同型類の集合から自然数の集合 $\mathbb{N}$（0 を含む）への全単射がある．各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $K^n$（数ベクトル空間）という具体的な対象を構成でき，これらの対象への同型を決める（基底を選ぶ）ことで任意の対象・射の具体的な表示が得られる．対象 $V$ から $W$ への集合は加法群の構造を持ち，部分対象・商対象・核・像・余核・余像・準同型定理・直和・完全系列が定式化できる Abel 圏になる．さらに任意の短完全系列は分解し，実際あらゆる対象は 1 次元の対象の有限個の直和に分解される（半単純性）．$K$ が代数的閉体ならば，自己準同型射も直和分解（対角化）されたものと簡単なベキ零元の和に書ける（標準形）．さらに内部テンソル積・内部 Hom・双対対象が定義されるのでテンソル圏，とくに淡中圏になっている．これらの操作 $(\oplus, \otimes, \mathrm{Hom}, {}^*)$ の他に，対称積 $\mathrm{Sym}^n$・外積 $\wedge$ など，対象から新しい対象を構成する標準的な操作がいくつか定義できる（強いて言えば，対称群 $S_n$ の各表現に対応するベキ等元に応じて作られる）．各対象 $V$ の自己同型群は一般線形群 $GL(V)$ であり，さらに各対象に最高次形式 $\wedge^{\dim V} V \cong K$（行列式）・内積・交代形式・エルミート形式などの付加構造を定義した圏を定義することもでき，それらの圏での自己同型群は特殊線形群・直交群・斜交群・ユニタリ群などの古典群になる．だいたいこの程度が，数学科で学ぶ線形代数の全体であり，これで $(\mathrm{Vect}/K)$ は完全に理解されたと感じられる．つまり，これ以上 $(\mathrm{Vect}/K)$ に関して解かれるべき問題はないようだ（これは驚くべきことかもしれない）．

この $(\mathrm{Vect}/K)$ の理論（線形代数）の，数学を記述し理解する方法論としての威力は絶大であった．幾何学では位相空間や多様体の圏から $(\mathrm{Vect}/K)$ への関手（コホモロジー理論）がいくつもの深い結果をもたらし，空間

上の関数の貼り合わせ（局所・大域原理）やベクトルバンドルの理論は，開集合の圏から $(\mathrm{Vect}\,/K)$ への関手（層）として記述され，微分形式や多様体上の調和解析（Hodge 理論）などの理論が見通しよく理解された．これらの関手は，言わば理論の「線形化関手」である．解析学では線形微分方程式の解空間がベクトル空間であったが，ヒルベルト空間論・フーリエ解析を初めとする深い結果のほとんどが無限次元の線形代数（関数解析）として整理された．これらの「理論の線形化（線形代数化）」が成功したのは，$(\mathrm{Vect}\,/K)$ の「理解」が，数学的構造の「理解」の雛型として機能したからと言えるだろう．

さて，われわれのテーマの視点からは，$(\mathrm{Vect}\,/K)$ とは，自明な群 $G = \{1\}$ の有限次元表現のなす圏に他ならない．その意味では，表現論とは線形代数の一般化である．表現論が，数学的理論を記述し理解するための言語として機能する所以がここにある．一般に，群 $G$ の，体 $K$ 上の有限次元ベクトル空間への**表現**，すなわち $G$ の作用が定義された $(\mathrm{Vect}\,/K)$ の対象のなす圏を $(G\text{-Rep}/K)$ と表そう．この圏の射は，$G$ の作用と整合的な $K$ 線形写像（表現の間の準同型写像）である．繰り返すが，自明な群は自明にしか作用できないから，自然に圏同値 $(\{1\}\text{-Rep}/K) \cong (\mathrm{Vect}\,/K)$ がある．そして，$G$ が有限群で $K$ が標数 0 の代数的閉体の場合，上に素描した $(\mathrm{Vect}\,/K)$ の理論がほぼそのまま $(G\text{-Rep}/K)$ の理論に一般化される，というのが，有限群の表現論の基礎である．とくに，0 と自分自身以外に部分対象を持たない既約な対象（**既約表現**）が既約指標（共役類の集合の上の関数の空間の直交基底をなす）によって分類され，任意の対象は既約対象の直和に分解すること（半単純性，あるいは完全可約性）が基本定理になる．既約な対象はもはや 1 次元とは限らないが，その自己準同型は $(\mathrm{Vect}\,/K)$ の既約対象（1 次元ベクトル空間）と同じく定数倍のみである（**Schur の補題**）．しかし，この $(\mathrm{Vect}\,/K)$ から $(G\text{-Rep}/K)$ への一般化によって，理論の構造的な操作に新たな自由度が加わる．すなわち，群 $G$ を変えるという自由度である．群準同型 $f : G \to H$ が与えられると，$H$ の表現は $f$ で引き戻すことで自然に $G$ の表現になるから，Abel 圏の間の加法的関手 $f^* : (H\text{-Rep}/K) \to (G\text{-Rep}/K)$ ができる．とくに $G$ が $H$ の部分群で $f$ が包含写像の場合は $f^*$ は表現の**制限** $\mathrm{Res}_G^H$ であり，その左随伴関手は表現の**誘導** $\mathrm{Ind}_G^H$ である（Frobenius 相互律）．単に一つ一つの準同型 $f$ による引き戻しを考えるだけでなく，あらゆる準同型 $f$，さらには剰余群 $G/H$，直積群 $G \times H$ など群の圏におけるあらゆる操作に付随して，異なる圏 $(G\text{-Rep}/K)$ たちの間の関手を考えることができる．このようにして，群の理論が線形化される，すなわち線形代数の言語で記述される，いや線形代数という理論そのものの一般化として理解される．これが表現論の考え方である．理論のパースペクティブがより高次になっているという意味で，表現論は群論に従属するものではなく，群論を発展させた理論であるという面がある．これから，表現論による理論の記述の強みを解説していきたいが，その前にわれわれの興味（代数的整数論）に沿った具体的な対象を導入していくことにしよう．

## 1.2 整数論と表現

群 $G$ の表現のなす圏 $(G\text{-Rep}/K)$ について語ることから始めたが，$G$ が Abel 群の場合はその既約表現はすべて 1 次元であるから，$(G\text{-Rep}/K)$ は $(\mathrm{Vect}\,/K)$ により近くなる．群 $G$ の既約表現といっても，1 次元ベクトル空間 $V$ への $G$ の作用は $G$ の**指標**，すなわち群準同型 $\chi : G \to K^\times$ で書ける．この $\chi$ は $V$ の基底の取り方によらずに決まるから，$V$ を忘れて $\chi$ だけで議論していても何も変わらない，とも言える．これが，可換な理論（本来の**類体論**）には表現論が現れなかった理由である．しかし，Abel 群の世界でも，群そのもののあいだの同型から，その指標への視点の転換は重要である．Abel 群の指標が初めて登場したのが Dirichlet 指標として整数論においてであったのは，偶然ではない．そこで，有理数体 $\mathbb{Q}$ の類体論を，$G_{\mathbb{Q}}$ の指標の理論と考えることから始めてみよう．

類体論とは，代数体の Abel 拡大を記述する理論である．とくに，Abel 拡大の Galois 群が，相互写像によって標準的に合同類群（イデール類群の商）と同型になる．これを有理数体 $\mathbb{Q}$ のの場合に Galois 表現の言葉で言うと次のようになる．有理数体 $\mathbb{Q}$ の最大 Abel 拡大 $\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$ の Galois 群 $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}/\mathbb{Q})$ は，絶対 Galois 群 $G_{\mathbb{Q}}$ の最大 Abel 商 $G_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{ab}}$（交換子群の閉包による剰余群）に他ならない．この Abel 群 $G_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{ab}}$ の既約表現とはその指標であるが，言

い換えれば群準同型 $G_{\mathbb{Q}} \to K^{\times}$，つまり $G_{\mathbb{Q}}$ の 1 次元表現のことである．つまり**類体論とは，1 次元 Galois 表現を記述する理論である**．さて，有理数体の場合はその Abel 拡大はすべて円分体 $\mathbb{Q}(\boldsymbol{\mu}_N)$（方程式 $X^N - 1$ の $\mathbb{Q}$ 上の最小分解体）に含まれるから（**Kronecker-Weber の定理**），最大 Abel 拡大は円分体の合併であり，その Galois 群は円分体の Galois 群の逆極限である：

$$\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}} = \bigcup_N \mathbb{Q}(\boldsymbol{\mu}_N), \quad G_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{ab}} = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}/\mathbb{Q}) \xrightarrow{\cong} \varprojlim_N \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\boldsymbol{\mu}_N)/\mathbb{Q})).$$

円分体の基本定理は，その Galois 群が次の標準的同型で与えられることであった：

$$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\boldsymbol{\mu}_N)/\mathbb{Q}) \ni (\zeta \mapsto \zeta^i) \xmapsto{\cong} i \bmod N \in (\mathbb{Z}/(N))^{\times}.$$

ここで $(\zeta \mapsto \zeta^i)$ は，すべての $\zeta \in \boldsymbol{\mu}_N$ を $i$ 乗するような $\mathbb{Q}(\boldsymbol{\mu}_N)$ の自己同型である．従って，最大 Abel 拡大の Galois 群は,

$$G_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{ab}} \xrightarrow{\cong} \varprojlim_N (\mathbb{Z}/(N))^{\times} = \widehat{\mathbb{Z}}^{\times}, \quad \widehat{\mathbb{Z}} := \varprojlim_N \mathbb{Z}/(N)$$

すなわち $\widehat{\mathbb{Z}}$（整数環 $\mathbb{Z}$ の副有限完備化）の単数群である．この群が $\mathbb{Q}$ の場合のイデール類群の剰余群になることはあとで見るが，まずこの群の指標（有限像指標）を見ておく．なぜなら，このように $G_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{ab}}$ と $\widehat{\mathbb{Z}}^{\times}$ の間に標準的な同型がある以上，類体論が記述する $G_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{ab}}$ の指標とは $\widehat{\mathbb{Z}}^{\times}$ の指標に他ならないからである．ここではまずこれらの群の指標のうち，有限商を経由する指標を考える．逆極限 $\widehat{\mathbb{Z}}^{\times}$ の有限像指標とは，ある $N$ に対して $(\mathbb{Z}/(N))^{\times}$ を経由する指標，すなわち $(\mathbb{Z}/(N))^{\times}$ の指標である．これを **Dirichlet 指標**というのであった.（もともと表現や指標の理論は複素係数，すなわち $K = \mathbb{C}$ で考えられていたが，後に述べるように $\widehat{\mathbb{Z}}^{\times}$ のような副有限群から $\mathbb{C}^{\times}$ への連続指標は自動的に有限像になってしまう.）つまり，有理数体 $\mathbb{Q}$ の類体論とは,

$$\{\ G_{\mathbb{Q}}\text{の有限像指標}\ \} \xleftrightarrow{1:1} \{\ \text{Dirichlet 指標}\ \}$$

という標準的な一対一対応を主張している．左辺は $\mathbb{Q}$ の Abel 拡大を記述しているが，右辺は基礎体 $\mathbb{Q}$ の整数論の言葉で記述される対象であることに注意しよう．これを $G_{\mathbb{Q}}$ のより一般次元の表現に拡張していこうとするのが，非可換類体論の目標である．

また，円分体の Galois 群と $(\mathbb{Z}/(N))^{\times}$ の間の同型には，素数の**分解法則**が書き込まれていたことを思い出そう．つまり，$N$ を割らない各素数 $p$ に対して，その円分体 $\mathbb{Q}(\boldsymbol{\mu}_N)$ での素イデアル分解の情報をもっている**数論的 Frobenius 写像** $\mathrm{Fr}_p$ が $p \bmod N$ に写る，逆に言えば，素数 $p$ を $N$ で割った余り $p \bmod N$ によってその $\mathbb{Q}(\boldsymbol{\mu}_N)$ での分解の様子が決まる（**相互法則**）という対応である．この相互法則そのものは純粋に整数論的な定理であるが，この整数論的な情報が，Galois 群の有限像指標と Dirichlet 指標という一対一対応を特徴づけているのである．非可換類体論（Langlands 対応）においても，Galois 表現と保型表現の間の一対一対応が，数論的な情報によって特徴づけられることになる．この「各素数 $p$ における情報の対応」は，各素数に対して $p^{-s}$ という複素変数 $s$ の関数の多項式を対応させてあらゆる素数に関して積を取る **Euler 積**によって定義される **$L$ 関数（ゼータ関数）**の一致という表現もできる．Dirichlet 指標に対応する $L$ 関数が，**Dirichlet $L$ 関数**である．

ここでは有限像指標のみを考えたが，一般の Galois 表現を考える際はもちろん有限でない像をもつ指標も考える．ここで，表現論の道具立ても，有限群の有限次元表現の範疇を超えて，位相群の連続表現という枠組みに移る．しかし，位相群といっても，絶対 Galois 群は有限群（有限次拡大の Galois 群）の逆極限という表示を持つ**副有限群**であり，位相群としては**副有限位相**（有限集合の離散位相の逆極限位相）が入っているだけである．副有限位相空間はコンパクトであるから，副有限群の表現論は有限次元表現の範囲で完成する．従って，Galois 表現（絶対 Galois 群の表現）としては，基本的に有限次元のものだけ考えればよい．位相群の連続表現としては，これはコンパクト群の表現論の一例と言える．しかし，副有限群の連続表現には，複素数体 $\mathbb{C}$ 上の表現を考えていても有限像の表現しか現れない.（ここで**有限像**とは，ベクトル空間 $V$ への $G$ の作用を群準同型 $\rho : G \to \mathrm{Aut}(V)$

と考えたときに，$\rho$ の像が有限群である，すなわち $\rho$ が $G$ の有限商（有限群）の表現だということである.）一般に，代数体の絶対 Galois 群の有限像表現を **Artin 表現**といい，これらは充分に興味深い対象であるが，係数体として複素数体でなく局所副有限位相を持った $\ell$ 進体 $\mathbb{Q}_\ell$ およびその拡大体を取ることによって，より豊かな表現が現れる．このことは，1 次元の場合にもすでに現れる．有理数体の場合 $G_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{ab}}$ は $\widehat{\mathbb{Z}}^\times$ に同型であったが，中国剰余定理によって $\widehat{\mathbb{Z}}$ はすべての素数 $\ell$ に対する $\ell$ **進整数環** $\mathbb{Z}_\ell := \varprojlim_m \mathbb{Z}/(\ell^m)$ の直積環に同型だから，その単数群からの自然な射影によって

$$\chi_\ell : G_{\mathbb{Q}} \to G_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{ab}} \xrightarrow{\cong} \widehat{\mathbb{Z}}^\times \to \mathbb{Z}_\ell^\times \subset \mathbb{Q}_\ell^\times$$

という，$\ell$ **進体** $\mathbb{Q}_\ell := \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ 係数の指標ができる．これは各 $m \geq 1$ に対する $\mathbb{Q}(\boldsymbol{\mu}_{\ell^m})$ の Galois 群を見ていることになるので $\ell$ **進円分指標**といい，有限像でない指標の一例になる．後に見るように，この円分指標のように重要な表現が一般次元でも無数に現れるため，Galois 群の有限次元表現としては，各 $\ell$ に対する $\ell$ **進表現**，すなわち $\mathbb{Q}_\ell$ の有限次拡大体上の有限次元ベクトル空間への表現を考えるのである．局所副有限位相をもつ位相体は $\ell$ 進体の有限次拡大体に限られるため，$\ell$ 進表現によって Galois 群の重要な表現はすべて尽くされると考えられる．また，数論的に重要な表現は，各 $\ell$ 進体上で定義されていても，本質的に $\ell$ によらない情報でパラメータ付けされる（Galois 表現の**整合系**をなす）と予想されている（後述）．まずは次節で，Galois 群の $\ell$ 進指標（1 次元 $\ell$ 進表現）の類体論を述べる．

## 2　$\mathbb{Q}$ 上の $\ell$ 進指標の類体論（$GL_1/\mathbb{Q}$ の Langlands 対応）

Galois 群の $\ell$ 進指標（1 次元 $\ell$ 進表現）を含めた形に類体論を拡張するには，Dirichlet 指標の側も $\widehat{\mathbb{Z}}^\times$ の有限像でない指標に拡張して考えなくてはならない．類体論においては $G_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{ab}}$ と $\widehat{\mathbb{Z}}^\times$ が同型なのであるから，各々の群のすべての $\ell$ 進指標が互いに対応するのは明らかであるが，ここでは右辺（$\widehat{\mathbb{Z}}^\times$ の指標）を $\ell$ によらない形で定式化できる「代数的 Hecke 指標」の場合の対応を考える．この代数的なケースを一般次元の $\ell$ 進表現に拡張したものが，現在の標準的な Langlands 対応の定式化となる．

前節では $G_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{ab}}$ に $\ell$ 進円分指標という有限像でない指標があるのを見たが，今度は $\widehat{\mathbb{Z}}^\times$ の側を考える．類体論を任意の代数体に一般化する際には，この副有限群 $\widehat{\mathbb{Z}}^\times$ はイデール類群の剰余群として現れる．これを簡単に復習しておこう．**アデール環** $\mathbb{A}$ は，有限アデール環 $\mathbb{A}^\infty := \widehat{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ と実数体 $\mathbb{R}$ の（$\mathbb{Q}$ 代数としての）直積 $\mathbb{A} := \mathbb{A}^\infty \times \mathbb{R}$ として定義され，その単数群 $\mathbb{A}^\times = GL_1(\mathbb{A})$ が**イデール群**である．$\mathbb{Q}$ 代数としての構造射 $\mathbb{Q} \to \mathbb{A}$ は単数群の単射 $\mathbb{Q}^\times \to \mathbb{A}^\times$ を誘導し，その剰余群が**イデール類群** $\mathbb{A}^\times/\mathbb{Q}^\times$ である．また $\mathbb{A}^\times = (\mathbb{A}^\infty)^\times \times \mathbb{R}^\times$ であり，環同型 $\widehat{\mathbb{Z}} \cong \prod_\ell \mathbb{Z}_\ell$ から定まる $\mathbb{Q}$ 代数の単射 $\mathbb{A}^\infty \to \prod_\ell \mathbb{Q}_\ell$ によって群の単射 $(\mathbb{A}^\infty)^\times \to \prod_\ell \mathbb{Q}_\ell^\times$ ができる．ここで $(\mathbb{A}^\infty)^\times$ は右辺の各直積成分の像を含むから各素数 $\ell$ に対する $\mathbb{Q}_\ell^\times \to (\mathbb{A}^\infty)^\times$ ができる．各素数に対する $\mathbb{Q}_\ell^\times$ および $\mathbb{R}^\times$ の像によって $\mathbb{A}^\times$ は生成される．有理数体の**素点** $v$ を素数 $\ell$（有限素点）あるいは無限素点 $\infty$ として $\mathbb{Q}_\infty := \mathbb{R}$ と書き，統一的に $\mathbb{Q}_v^\times \subset \mathbb{A}^\times$ と考える．また $\widehat{\mathbb{Z}}$ は $\mathbb{A}^\infty$ の部分環だから $\widehat{\mathbb{Z}}^\times$ は $(\mathbb{A}^\infty)^\times$ の部分群である．整数環 $\mathbb{Z}$ における**素因数分解の一意性**は，イデール群 $\mathbb{A}^\times$ はその三つの部分群 $\mathbb{Q}^\times$, $\widehat{\mathbb{Z}}^\times$, $\mathbb{R}_{>0}^\times$（正の実数のなす乗法群）に直積分解する，と表現することができ，直積成分 $\mathbb{R}_{>0}^\times$ への射影 $\mathbb{A}^\times \to \mathbb{R}_{>0}^\times$ は**絶対値** $|\cdot|$ で与えられる．

有理数体の類体論は，$G_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{ab}}$ がイデール類群 $\mathbb{A}^\times/\mathbb{Q}^\times$ の剰余群に同型，すなわち $\mathbb{A}^\times/\mathbb{Q}^\times\mathbb{R}_{>0}^\times \xrightarrow{\cong} G_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{ab}}$ と表すことができる．後で詳しく述べるが，これは任意の代数体，すなわち $\mathbb{Q}$ の有限次拡大体 $F$ に次のように一般化される．代数体 $F$ のアデール環は $\mathbb{A}_F := \mathbb{A} \otimes_{\mathbb{Q}} F$ で定義され，$F$ 代数としての構造射 $F \to \mathbb{A}_F$ によって $F^\times$ は $\mathbb{A}_F^\times$ の部分群であり，$F$ のイデール類群 $\mathbb{A}_F^\times/F^\times$ ができる．類体論の主定理は，$F$ の最大 Abel 拡大の Galois 群 $G_F^{\mathrm{ab}} := \mathrm{Gal}(F^{\mathrm{ab}}/F)$ がイデール類群 $\mathbb{A}_F^\times/F^\times$ の単位元の連結成分の閉包による剰余群に同型になることである（この同型写像（Artin 写像）については後に述べる）．連結成分の閉包というときにはイデール群を位相群として考えている（有理数体 $\mathbb{Q}$ の場合には $\mathbb{Q}^\times\mathbb{R}_{>0}^\times$ がすでに $\mathbb{A}^\times$ の閉部分群であった）．Langlands 対応への一般化を視野に入れて，イデール群の位相について考えておこう．

イデール群 $\mathbb{A}^\times$ は $(\mathbb{A}^\infty)^\times$ と $\mathbb{R}^\times$ の直積群であり，後者の位相は周知であるから前者の位相について述べる．この $(\mathbb{A}^\infty)^\times$ は副有限群ではないがその一般化である**局所副有限群**，すなわち副有限群を開部分群として持つ群の一例となる．現在の整数論においては，局所副有限群の表現論がいたるところで重要になる．この $(\mathbb{A}^\infty)^\times$ には，その部分群 $\widehat{\mathbb{Z}}^\times$（前節で見たように副有限群である）が開部分群となる位相を定める．

局所副有限群 $G$ の連続指標（連続準同型 $\rho : G \to \mathbb{C}^\times$）を考える．副有限群はコンパクトだから，$G$ の副有限な開部分群 $U$ の像は $\mathbb{C}^\times$ の最大コンパクト部分群 $U(1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ に含まれる．この $U(1)$ には $\{1\}$ 以外に部分群を含まないような 1 の開近傍 $X$ がとれるから（例えば $X = \{e^{i\theta} \mid -\pi/2 < \theta < \pi/2\}$），$\rho^{-1}(X)$ に含まれるような $U$ の開部分群 $V$ をとれば $V \subset \operatorname{Ker}\rho$ で，$\rho$ は離散群 $G/V$ を経由する．この状態を任意次元の表現に一般化したのが後に述べる平滑表現である．

さて，イデール類群の連続指標 $\Pi : \mathbb{A}^\times/\mathbb{Q}^\times \to \mathbb{C}^\times$ を **Hecke 指標**と呼ぶ（イデール群の指標 $\Pi : \mathbb{A}^\times \to \mathbb{C}^\times$ と考えることもある）．前節に見たように，これが副有限商 $\mathbb{A}^\times/\mathbb{Q}^\times\mathbb{R}^\times_{>0} \cong \widehat{\mathbb{Z}}^\times$ を経由する場合は Dirichlet 指標となるが，それ以外に絶対値 $|\cdot| : \mathbb{A}^\times/\mathbb{Q}^\times\widehat{\mathbb{Z}}^\times \cong \mathbb{R}^\times_{>0} \subset \mathbb{C}^\times$ なども Hecke 指標である．このように Dirichlet 指標でない Hecke 指標は，副有限商 $\mathbb{A}^\times/\mathbb{Q}^\times\mathbb{R}^\times_{>0} \cong \widehat{\mathbb{Z}}^\times \cong G_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{ab}}$ を経由しないから Galois 群の指標には対応しないように見えるが，前節で説明した相互法則の立場から考えると，Galois 群の指標が対応していることがわかるのである．

相互法則とは，各素数 $p$ に対する数論的 Frobenius 写像 $\mathrm{Fr}_p$ の振る舞いの記述であった．例えば $\ell$ 進円分指標 $\chi_\ell : G_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{ab}} \to \mathbb{Z}_\ell^\times$ においては，$\ell$ 以外の素数 $p$ に対して，$\mathrm{Fr}_p$ は $p \in \mathbb{Z}_\ell^\times$ に写っている．これを同型 $G_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{ab}} \cong \widehat{\mathbb{Z}}^\times$ を通してイデール類群側で見るには，Hecke 指標の**局所成分**を用いる．Hecke 指標 $\Pi : \mathbb{A}^\times \to \mathbb{C}^\times$ と素点 $v$ に対して，$\Pi$ を $\mathbb{Q}_v^\times \subset \mathbb{A}^\times$ に制限したもの $\Pi_v : \mathbb{Q}_v^\times \to \mathbb{C}^\times$ を $\Pi$ の $v$ での局所成分という．これは連続指標であるから，$v$ が有限素点ならば $\mathbb{Q}_v^\times$ のある開部分群上で 1 であるが，さらに強く $\Pi|_{(\mathbb{A}^\infty)^\times}$ は $(\mathbb{A}^\infty)^\times$ のある開部分群 $U$ 上で 1 だが，$U$ は $\widehat{\mathbb{Z}}^\times$ の有限指数部分群であるから，**ほとんどすべて**（有限個を除いてすべて）の $p$ に対して $\mathbb{Z}_p^\times$ を含む，すなわち $\Pi_p$ は $\mathbb{Q}_p^\times/\mathbb{Z}_p^\times \cong p^{\mathbb{Z}}$ を経由する．さて $\Pi$ が Dirichlet 指標であった場合には，$\Pi : \mathbb{A}^\times \to \widehat{\mathbb{Z}}^\times \to (\mathbb{Z}/(N))^\times \to \mathbb{C}^\times$ に対して，素数 $p$ が $N$ を割らなければ $\Pi_p : \mathbb{Q}_p^\times \to \mathbb{C}^\times$ による $p \in \mathbb{Q}_p^\times$ の像 $\Pi(p)$ は，$(p \bmod N)^{-1} \in (\mathbb{Z}/(N))^\times$ の像になるから，前節の内容により，対応する Galois 群の有限像指標 $R : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\boldsymbol{\mu}_N)/\mathbb{Q}) \to \mathbb{C}^\times$ による**幾何的 Frobenius 写像** $\mathrm{Frob}_p := \mathrm{Fr}_p^{-1} \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\boldsymbol{\mu}_N)/\mathbb{Q})$ の像に等しい．つまり，相互法則を記述しているのは，Hecke 指標の側では，局所成分 $\Pi_p$ が $\mathbb{Q}_p^\times/\mathbb{Z}_p^\times$ を経由するような（ほとんどすべての）素数 $p$ に対する $p \in \mathbb{Q}_p^\times$ の像 $\Pi_p(p)$ である：

$$\Pi_p(p) = R(\mathrm{Frob}_p) \quad \text{（\textbf{相互法則}）.}$$

このような対応をもつ $R$ が，Dirichlet 指標でない Hecke 指標 $\Pi$ についても存在するかどうか考えてみる．例えば絶対値 $\Pi = |\cdot|$ においては，局所成分 $\Pi_p = |\cdot|_p$ はすべての $p$ に対して $\mathbb{Q}_p^\times/\mathbb{Z}_p^\times$ を経由し，$|p|_p = p^{-1}$ である．これに対応する Galois 群の指標があるとすれば，ほとんどすべての $p$ に対して幾何的 Frobenius 写像 $\mathrm{Frob}_p$ が $p^{-1}$ に写すものということになるが，$\ell$ 進円分指標 $R = \chi_\ell$ は $\ell$ 以外のすべての素数 $p$ に対して $\mathrm{Frob}_p = \mathrm{Fr}_p^{-1}$ を $p^{-1} \in \mathbb{Z}_\ell^\times$ に写すから，まさにこの性質をみたしている．ただし注意しなければならないのは，この値 $p^{-1}$ は有理数であったから $\mathbb{C}^\times$ にも $\mathbb{Z}_\ell^\times$ にも属していたが，$\Pi$ と $R$ の値域が異なるということである．従って，$|\cdot| \leftrightarrow \chi_\ell$ のように相互法則によって特徴づけられる対応 $\Pi \leftrightarrow R$ をあらゆる $\Pi$ に対して期待することはできない．しかし，対応する $\Pi, R$ が存在すれば，ほとんどすべての $p$ に対する相互法則（上の等式）によって一意に決定されるということは，弱近似定理・Chebotarev の密度定理からわかる．

この $|\cdot| \to \chi_\ell$ を模倣して対応 $\Pi \to R$ を構成してみよう．Dirichlet 指標の場合と同様に，できる限り同型 $\mathbb{A}^\times/\mathbb{Q}^\times\mathbb{R}^\times_{>0} \cong G_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{ab}}$ を利用したい．そこで，Hecke 指標 $\Pi : \mathbb{A}^\times \to \mathbb{C}^\times$ を，$v \neq \ell, \infty$ では局所成分 $\Pi_v$ を変更しないままで，$\mathbb{R}^\times_{>0}$ 上で 1 になるように修正してみる．イデール群の元 $x \in \mathbb{A}^\times$ に対して，その局所成分 $x_v$ を $\mathbb{A}^\times \to \prod_v \mathbb{Q}_v^\times \to \mathbb{Q}_v^\times$ による像で定義するとき，まず

$$\Pi' : \mathbb{A}^\times \to \mathbb{C}^\times, \quad \Pi'(x) = \Pi(x)/\Pi_\infty(|x_\infty|)$$

とすると，これは $\mathbb{R}_{>0}^{\times}$ 上では 1 になる．しかし今度は $\mathbb{Q}^{\times}$ 上で 1 にならないから，まだ $\mathbb{A}^{\times}/\mathbb{Q}^{\times}\mathbb{R}_{>0}^{\times} \cong G_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{ab}}$ に移ることができないので，次は $\ell$ での局所成分 $x_\ell$ を用いて修正する．$\mathbb{Q}^{\times}$ の元 $x$ に対してはすべての素点 $v$ に対して $x_v = x$ であるが，有理数 $x$ を実数と見て $\Pi_\infty$ で写した値 $\Pi_\infty(|x_\infty|)$ を，$x$ を $\ell$ 進数と見た $x_\ell$ を用いて打ち消すためには，$\mathbb{Q}_{>0}^{\times} \ni z \mapsto \Pi_\infty(|z|) \in \mathbb{C}^{\times}$ が代数的な（有理数係数の多項式で定義された）写像である必要がある．代数的な準同型 $\mathbb{Q}_{>0}^{\times} \to \mathbb{C}^{\times}$ は整数 $k$ に対する $z \mapsto z^k$ という形のものでなければならず，$\mathbb{Q}_{>0}^{\times}$ は $\mathbb{R}_{>0}^{\times}$ の中で稠密であるから，結局 $\mathbb{R}_{>0}^{\times}$ 全体の上で $\Pi_\infty$ は $z \mapsto z^k$ $(k \in \mathbb{Z})$ という形を取っている必要がある．この条件をみたす $\Pi$ を，**重さ** $-k$ **の代数的 Hecke 指標**という（重さ 0 の代数的 Hecke 指標が Dirichlet 指標に他ならない）．このとき，$\Pi''(x) := \Pi(x) \cdot (x_\ell/x_\infty)^k$ と定義すれば，$x \in \mathbb{Q}^{\times}$ に対しては $\Pi''(x) = \Pi(x) = 1$ である．しかし，一般の $x \in \mathbb{A}^{\times}$ に対しては $x_\ell \in \mathbb{Q}_\ell^{\times}$ で $x_\infty \in \mathbb{R}^{\times}$ だから，このままでは $\Pi''$ の定義は意味をなさない．そこで代数的閉包の間の体同型 $\iota : \overline{\mathbb{Q}}_\ell \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}$ を固定し，

$$\Pi'' : \mathbb{A}^{\times} \ni x \longmapsto \Pi(x) \cdot (\iota(x_\ell)/x_\infty)^k \in \mathbb{C}^{\times}$$

と定義すれば，$\Pi''$ は $\mathbb{A}^{\times}/\mathbb{Q}^{\times}\mathbb{R}_{>0}^{\times} \cong \widehat{\mathbb{Z}}^{\times}$ を経由する準同型となる．しかしこの $\Pi''$ は $k = 0$ でない限り有限像でないから連続でないので，再び $\iota$ を用いることで $\ell$ **進 Hecke 指標** $\Pi_\iota$ に変換する：

$$\Pi_\iota := \iota^{-1} \circ \Pi'' : \mathbb{A}^{\times} \ni x \longmapsto \iota^{-1}\big(\Pi(x)/x_\infty^k\big) \cdot x_\ell^k \in \overline{\mathbb{Q}}_\ell^{\times}.$$

このとき，$x \in \widehat{\mathbb{Z}}^{\times}$ に対しては $x_\infty = 1$ だが，$\iota^{-1} \circ \Pi$ は $\widehat{\mathbb{Z}}^{\times}$ の上では有限商を経由するから連続であり，$x \mapsto x_\ell^k$ は連続であるから，$\Pi_\iota : \widehat{\mathbb{Z}}^{\times} \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^{\times}$ は連続である．以上の $\Pi$ から $\Pi_\iota$ への修正では $v \neq \ell, \infty$ に対する局所成分 $\Pi_v$ は全く変わっていないから，相互法則は依然みたされる．また，ここで相互法則が意味を持つのは，代数的 Hecke 指標 $\Pi$ に対しては $\Pi|_{(\mathbb{A}^\infty)^\times}$ の像がある代数体に含まれるから（証明してみよう），局所成分 $\Pi_p$ が不分岐である（$\mathbb{Q}_p^{\times}/\mathbb{Z}_p^{\times}$ を経由する）ような $p$ に対する $\Pi_p(p)$ が代数的数であり，従って $\mathbb{C}^{\times}$ の元とも $\overline{\mathbb{Q}}_\ell^{\times}$ の元ともみなせるからであることに注意する．最後に，類体論の同型を合成して $G_{\mathbb{Q}}$ の $\ell$ 進指標を得る：

$$R : G_{\mathbb{Q}} \to G_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{ab}} \xrightarrow{\cong} \mathbb{A}^{\times}/\mathbb{Q}^{\times}\mathbb{R}_{>0}^{\times} \xrightarrow{\Pi_\iota} \overline{\mathbb{Q}}_\ell^{\times}.$$

上の分析から，このようにして得られた $\ell$ 進指標 $R$ は，$G_{\mathbb{Q}}$ の有限像指標に $\ell$ 進円分指標 $\chi_\ell$ の $k$ 乗を掛けたものになっている．このような $R : G_{\mathbb{Q}} \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ を，$G_{\mathbb{Q}}$ の **Hodge-Tate の重さ** $-k$ **の代数的** $\ell$ **進指標**という．逆にこのような $R$ から出発すれば上の構成を逆戻りすることで代数的 Hecke 指標 $\Pi$ が得られるから，以上をまとめて，次の定理を得る．

**定理 2.1** （$G_{\mathbb{Q}}$ **の** $\ell$ **進指標の類体論**）素数 $\ell$ と体同型 $\iota : \overline{\mathbb{Q}}_\ell \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}$ を固定する．代数的 Hecke 指標 $\Pi : \mathbb{A}^{\times} \to \mathbb{C}^{\times}$ と代数的 $\ell$ 進指標 $R : G_{\mathbb{Q}} \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^{\times}$ は，ほとんどすべての素数 $p$ に対して $\Pi_p(p) = \iota \circ R(\mathrm{Frob}_p)$ をみたすように互いに一対一に対応する．このとき $\Pi$ の重さと $R$ の Hodge-Tate の重さは等しい．

少し長くなったので，一般の代数体に対する $\ell$ 進指標の類体論は後述することとして，いくつかの注意をしておいて本節を終わることにする．まず第一に，上の対応はあらゆる $(\ell, \iota)$ に対して同時に $\ell$ 進指標を構成しており，これらは $\ell$ **進指標の整合系**と呼ばれるものを作っている（整合系の定義については，例えば本報告集の山内氏・安田氏の解説を参照）．これは，これらの Galois 指標が（代数体に係数を持つ）モチーフの $\ell$ 進実現になっていることの現れである．Galois 群は副有限であるから，このモチーフは複素係数の Galois 指標として現れることはできないが，Hecke 指標の側には複素係数で現れることができる．第二に，$\ell$ 進指標の類体論と言っても，本来の（有限像指標の）類体論に本質的に新しい事実が加わったわけではない．類体論は副有限群の同型 $G_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{ab}} \cong \widehat{\mathbb{Z}}^{\times}$ を与え，とくに両辺の $\mathbb{C}$ 係数（従って有限像）指標を対応させたが，この群にはそれら以外にも $\ell$ 進係数の重要な指標が存在する．また $\widehat{\mathbb{Z}}^{\times}$ をイデール類群 $\mathbb{A}^{\times}/\mathbb{Q}^{\times}$ の商と考えると，このイデール類群には $\mathbb{C}$ 係数でも $\widehat{\mathbb{Z}}^{\times}$ を経由しない重要な指標が存在する．これらの間に，本来の類体論と同様に相互法則を介した対応を作ることが

できる，というのが，Weil[We] の洞察であった．この定式化を用いて Galois 指標に関してわかること（例えば，ほとんどすべての素点で不分岐であること，代数的な場合の Frobenius の重さや整合系の存在）はすべて，類体論によって Galois 指標はイデール類群の $\ell$ 進指標に他ならないことから，イデール類群の $\ell$ 進指標についての性質として導かれるものでしかない．しかし，これらは高次元の Galois 表現のさまざまな様相への導きの糸となり，非可換類体論の氷山の一角を表したのであるから，群そのものから群の表現への定式化・視点の転換の重要さを示しているように思われる．

# 3 表現論の諸相 (2)

## 3.1 位相群と表現・保型表現

前節でみた代数的 $\ell$ 進表現の類体論では，Hecke 指標（$\mathbb{C}$ 係数）と Galois 指標（$\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 係数）では，位相的に大きく様子の異なる群・指標の間に対応を作った．Galois 側では，$\ell$ における局所的な Galois 群（その大きな部分が副 $\ell$ 群である）の $\ell$ 進指標の中に代数的に捉えられる部分があることが重要であり，これが保型側のイデール類群の連結成分の $\mathbb{C}$ 係数指標のうちの代数的なものと対応した．残りの素点での振舞いは本質的に離散群の表現になる．つまり，基礎体と係数体の位相が一致するときに解析的で豊かな理論が出現するが（複素解析または $\ell$ 進解析；これは Galois 表現・表現論・代数幾何のいずれにおいても同じである），大域的な（整数論的な）対象には充分に剛性があるので，ほとんどすべての素点での振舞いによって特定することができる．そこでまず $\ell$ と無限を除いたほとんどすべての素点における現象を分類するのだが，この場合には本質的に離散的なパラメータが取れる．Galois 表現の世界では，これは剰余標数 $p$ の局所体の Galois 群の $\ell$ 進表現が **Weil-Deligne 表現**と対応することがこれにあたる（本報告集の山内氏・三枝氏の解説を参照）．保型表現の世界では，局所副有限群（有限アデール環または局所体上の代数群）の $\mathbb{C}$ 係数連続表現としては**平滑表現・許容表現**を考えるが，これは本質的に純代数的な（位相のない）**Hecke 環**の表現と対応することがそれにあたる（実際 $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ の平滑表現は，歴史的には古典的モジュラー形式の **Hecke 作用素**として現れた）．基礎体と係数体の位相が異なる場合には，ある種の位相的連続性を要求することが，逆に位相を離れた代数的な対象を定義する結果となっているとも言える．もっとも，有限群ではないから，コンパクトリー群の表現論と同様に Haar 測度や積分を用いて理論が記述されるが，平滑表現の理論においては積分はほとんど例外なく本質的に有限和である．

現在の非可換類体論は Galois 表現を**保型表現**を通して理解する理論であると言っても過言ではないほど，Galois 表現の世界で直接証明できる命題は少ない．前節で現れたイデール類群 $\mathbb{A}^\times/\mathbb{Q}^\times$ の Hecke 指標は $GL_1(\mathbb{A})$ の保型表現に他ならないが，Galois 指標に関する結果のほとんどは Hecke 指標の性質として導かれることは前に述べたとおりである．本稿は Galois 表現への入門的解説だが，保型表現に関して最低限の導入を試みる．非可換類体論によって $n$ 次元の Galois 表現に対応するのは $GL_n$ の保型表現だが，$n=1$ と $n>1$ では大きく様子が異なっており，さらに $n=2$ と $n>2$ でも様子が異なるから，これらが統一的に見えてくるのは，Langlands 対応に適したパラメータを用いたときだけだと言えるかも知れない．$GL_n(\mathbb{A})$ の保型表現とはその名の通り群 $GL_n(\mathbb{A})$ のある種の既約表現であり，$n=1$ のときは $GL_1(\mathbb{A})=\mathbb{A}^\times$ は Abel 群だから 1 次元表現（指標）であったが，$n>1$ のときは $\det : GL_n \to GL_1$ を経由する指標を除くと無限次元表現になる（おそらく $GL_n(\mathbb{A})$ の有限次元表現にはそれほど興味深いものがない）．これらはどのような表現かというと $GL_n(\mathbb{A})$ 上の**保型形式**のなす $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間への表現（の部分商として現れる既約表現）であり，保型形式とはいくつかの条件をみたす関数（指標ではない！）$\phi : GL_n(\mathbb{Q})\backslash GL_n(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ のことである．次に $n=2$ の場合，Gauss 以来の上半平面上の古典的**モジュラー形式**の理論として研究されてきたものは，$GL_2(\mathbb{A})$ の正則保型表現の理論に他ならない．これは重さが正則な場合の保型形式は上半平面上のモジュラー形式に対応し，例えば $GL_2(\mathbb{A})$ の正則尖点的保型表現を生成する保型形式は，古典的モジュラー形式の理論で新形式（正確には，正規化された Hecke 固有尖点新形式）と呼ばれたものと 1 対 1 に対応するからである．しかし，$GL_2(\mathbb{A})$ の正則でない保型表現を生成する保型形式や，$n>2$

の場合の $GL_n(\mathbb{A})$ 上の保型形式は，上半平面のような複素多様体上の正則関数にはならない．このような複素多様体，従って代数幾何学の対象と直接結びついたのは，$GL_2$ が $\mathbb{R}$ 上で離散系列表現をもつ群だったからであり，このようなことはシンプレクティック群 $GSp_{2n}$（$GL_2$ は $GSp_2$ でもある）やユニタリ群の場合に起こる（志村多様体の理論）．このような事情によって，「$GL_n(\mathbb{A})$ 上の保型形式・保型表現」という枠組みは，古典理論からは類推しにくいものになっているのである．ここでは，古典的なモジュラー形式から $GL_2(\mathbb{A})$ 上の保型形式への翻訳を概観し，保型表現（とくにその有限部分）が局所副有限群の許容表現という枠組みで捉えられる様子を紹介する．

古典的なモジュラー形式の理論を非可換類体論の枠組みに接続するには二つの視点の変換が必要である．一つ目はモジュラー形式を保型形式（リー群上の関数）として捉え直し表現論を用いて考えること，二つ目は保型形式をアデール上で考えることで表現を局所成分に分解することである．モジュラー形式は上半平面上の関数であって離散群の作用に関してある対称性を持つものであったが，これを次のように考える．まず上半平面 $\mathcal{H}^+ := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ は，左からリー群 $G := GL_2^+(\mathbb{R}) := \{g \in GL_2(\mathbb{R}) \mid \det g > 0\}$ が 1 次分数変換によって推移的に作用し，例えば $i \in \mathcal{H}^+$ の安定化群は $U := \mathbb{R}_{>0}^\times SO_2(\mathbb{R}) \cong \mathbb{C}^\times$ である（この $U$ は，中心の連結成分 $Z^0$ を含む連結部分群であって $Z^0$ による剰余群がコンパクトになるようなもののうち極大なもの (maximal connected “compact modulo center” subgroup) である．これに適当な用語がないのは，文献が豊富にある連結半単純リー群の枠組みでは「極大コンパクト部分群」になってしまうからであろう.）から，$C^\infty$ 多様体として $\mathcal{H}^+ \cong G/U$ であり，複素構造はリー代数を用いて書ける．このような多様体を**対称空間**という．モジュラー形式は $\mathcal{H}^+$ 上の正則関数 $f : \mathcal{H}^+ \to \mathbb{C}$ であって，$SL_2(\mathbb{Z})$ の合同部分群 $\Gamma$ の作用に関して保型性および無限遠点での増大条件をみたすものであった．この**保型性**とは，$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して $\mu(g, z) := cz + d$ として，$k \in \mathbb{Z}_{>0}$（重さ）に対し $(f \cdot [g]_k)(z) := \mu(g, z)^{-k} f(gz)$ と定義される右作用に関する不変性 $f \cdot [\gamma]_k = f$ $(\forall \gamma \in \Gamma)$ であるが，これに対して $\phi : G \to \mathbb{C}$ を $\phi(g) := \mu(g, i)^{-k} f(gi)$ で定義し，$U$ の指標 $\chi_k : U \to \mathbb{C}^\times$ を $\chi_k(u) := \mu(u, i)^{-k}$ で定めると次の対応ができる：

$$\left\{\ f : \mathcal{H}^+ = G/U \to \mathbb{C} \ \middle|\ f \cdot [\gamma]_k = f\ \right\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \left\{\ \phi : \Gamma\backslash G \to \mathbb{C} \ \middle|\ \phi(gu) = \chi_k(u)\phi(g)\ \right\}.$$

このように，離散群 $\Gamma$ の作用に関する保型性をみたすような対称空間 $G/U$ 上の関数を，コンパクト群 $U$ の作用にがある表現を経由するような $\Gamma\backslash G$ 上の関数と捉え直すと，これらの関数 $\phi$ への $G$ の左作用によって $G$ の表現論を用いることができる．これが**保型形式** (automorphic form) の考え方であり，先日亡くなった Gelfand の 1950 年代の研究に遡る．保型形式に $G$ を作用させていくと重さの異なる保型形式がたくさん現れて無限次元表現を作り（許容 $(\mathfrak{g}, U)$ 加群と見てもよい），初めの保型形式の空間はその最小 $U$ タイプの空間を見ていたことになる．

第二の点であるアデール化には，強近似定理を用いる．先ほどの $\mathbb{R}$ 上の議論で $U$ と表していたものを $U_\infty := \mathbb{R}_{>0}^\times SO_2(\mathbb{R})$ と書くことにする．まずは，アデール環上の群 $GL_n(\mathbb{A})$ は，$n = 1$ の場合と同様にその部分群 $GL_n(\mathbb{Q}), GL_n(\widehat{\mathbb{Z}}), GL_n^+(\mathbb{R})$ によって生成される（$n > 1$ では直積分解にはならないが）．この事実が，$GL_n(\widehat{\mathbb{Z}})$ の開部分群 $U$ で $\det U = \widehat{\mathbb{Z}}^\times$ であるようなものに縮小しても成り立つ：

$$GL_n(\mathbb{A}) = GL_n(\mathbb{Q}) \cdot U \cdot GL_n^+(\mathbb{R}) \quad (U \subset GL_n(\widehat{\mathbb{Z}}),\ \det U = \widehat{\mathbb{Z}}^\times$$

というのが $GL_n$ の**強近似定理**であり，本質的に $SL_n(\mathbb{Z}) \to SL_n(\mathbb{Z}/(N))$ の全射性 ([Sh], Lemma 1.38) から従う．例えば $U$ として，

$$U_1(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle|\ c \equiv 0,\ d \equiv 1 \pmod{N} \right\} \subset GL_2(\widehat{\mathbb{Z}}).$$

を取ると，$\Gamma_1(N) := SL_2(\mathbb{Z}) \cap U_1(N)$ がレベル $N$ の古典的モジュラー形式を定める合同部分群であり，ふつう

**モジュラー曲線** $Y_1(N)$ と呼ばれる $\Gamma_1(N)\backslash\mathcal{H}^+$ は，強近似定理から直ちに，

$$\Gamma_1(N)\backslash\mathcal{H}^+ = \Gamma_1(N)\backslash GL_2^+(\mathbb{R})/U_\infty \xrightarrow{\cong} GL_2(\mathbb{Q})\backslash GL_2(\mathbb{A})/(U_1(N)U_\infty)$$

という表示を持つ．これは $\mathbb{R}$ 上の議論の $\Gamma\backslash G/U$ の場合と類似の状態で，アデール群 $GL_2(\mathbb{A})$ を左から離散群 $GL_2(\mathbb{Q})$ で，右から閉部分群 $U_1(N)U_\infty$ で割った形になっている．そこでモジュラー形式を $\Gamma_1(N)\backslash GL_2^+(\mathbb{R})$ 上の保型形式と考えたものをさらに引き戻して $GL_2(\mathbb{Q})\backslash GL_2(\mathbb{A})$ 上の保型形式と考えることができる：

$$\{\ \phi : \Gamma_1(N)\backslash GL_2^+(\mathbb{R}) \to \mathbb{C} \mid \phi(gu) = \chi_k(u)\phi(g)\ \} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{\ \phi : GL_2(\mathbb{Q})\backslash GL_2(\mathbb{A}) \to \mathbb{C} \mid \phi(gu) = \chi_k(u)\phi(g)\ \},$$

ここで $\chi_k$ は $U_\infty$ の指標を $U_1(N)$ 上自明になるように延長したものである．この表示によって，巨大な群 $GL_2(\mathbb{A})$ の作用を適用できる可能性が現れる．上の $U_1(N)$ を一般の開コンパクト部分群 $U \subset GL_2(\mathbb{A}^\infty)$ で考え，レベル $U$・重さ $k$ の $GL_2(\mathbb{A})$ 上の保型形式の空間を

$$\mathcal{A}_k(U) := \left\{\ \phi : GL_2(\mathbb{Q})\backslash GL_2(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}\ \middle|\ \begin{array}{l} \text{(i) } \phi(gu) = \chi_k(u)\phi(g) \quad (u \in U_\infty), \\ \text{(ii) } \phi(gu) = \phi(g) \quad (\forall u \in U), \\ \text{(iii) } \mathcal{H}^+ \text{ 上での正則性と無限遠点での増大条件.} \end{array} \right\}$$

と定める．このとき $U \subset U'$ ならば $\mathcal{A}_k(U') \subset \mathcal{A}_k(U)$ である．レベル $U$ の保型形式に $a \in GL_2(\mathbb{A}^\infty)$ を $\phi \longmapsto (u\phi : g \mapsto \phi(gu))$ で左作用させるとレベルの保型形式に移るから，$GL_2(\mathbb{A}^\infty)$ の表現を作るにはあらゆるレベルについての合併をとって $\mathcal{A}_k := \bigcup_U \mathcal{A}_k(U)$ とする．こうして局所副有限群 $GL_2(\mathbb{A}^\infty)$ の $\mathbb{C}$ 上の無限次元表現 $\mathcal{A}_k$ ができる．ここで，$GL_n(\mathbb{A}^\infty)$ の局所副有限位相は，$n=1$ の場合と同様に副有限群 $GL_n(\widehat{\mathbb{Z}}) = \varprojlim GL_n(\mathbb{Z}/(N))$ を開部分群と定めたものである．任意の開コンパクト部分群 $U \subset GL_2(\mathbb{A}^\infty)$ に対し，これによる不変部分を取れば $\mathcal{A}_k(U)$ が復元される：

$$\mathcal{A}_k(U) = \mathcal{A}_k^U := \{\ \phi \in \mathcal{A}_k \mid u\phi = \phi\ (\forall u \in U)\ \}.$$

この表現 $V = \mathcal{A}_k$ の特徴は次の二点である：(1) 任意のベクトル $\phi \in V$ はある開コンパクト部分群による不変空間 $V^U$ に属する（これらの合併として定義した！）．このような表現を**平滑 (smooth) 表現**という．(2) 任意の開コンパクト部分群による不変空間 $V^U$ は有限次元である（与えられたレベルと重さの保型形式の有限性）．このような平滑表現を**許容 (admissible) 表現**という．つまり，局所副有限群の平滑表現・許容表現とは，あらゆるレベルを合わせた保型形式の空間を $GL_2(\mathbb{A}^\infty)$ の表現と考えた状況を抽象化したものである．この $GL_2(\mathbb{A}^\infty)$ は各素数 $p$ に対して $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ を含むが，この作用を各不変空間の言葉で表したものが古典理論における **Hecke 作用素**であった．一般に，局所副有限群 $G$ の $\mathbb{C}$ 上の許容表現 $V$ と開コンパクト群 $U \subset G$ に対して，$\mathbb{C}$ 上の有限次元ベクトル空間 $V^U$ は **Hecke 環** $\mathbb{C}[U\backslash G/U]$（両側剰余類で生成される非可換環）の有限次元表現と考えられる．局所副有限群 $GL_2(\mathbb{A}^\infty)$ の開コンパクト部分群 $U$ は（副有限位相の定義により）ほとんどすべての素数 $p$ に対して $GL_2(\mathbb{Z}_p)$ を含むから，$\mathbb{C}$ 上の有限次元ベクトル空間 $V^U$ は Hecke 環 $\mathbb{C}[GL_2(\mathbb{Z}_p)\backslash GL_2(\mathbb{Q}_p)/GL_2(\mathbb{Z}_p)]$ の表現であり，これは有限生成な可換環であってその生成元にあたるのが Hecke 作用素 $T_p$ であった．さらに，上の定義で (iii) の増大条件を強めることで**尖点形式**の定義を得るが，この尖点形式の空間 $\mathcal{A}_k^0$ を $GL_2(\mathbb{A}^\infty)$ の表現として既約分解して得られる表現 $\Pi^\infty$ を $GL_2(\mathbb{A}^\infty)$ の（重さ $k$ の）**尖点的保型表現**という．一般に $GL_n(\mathbb{A}^\infty)$ の既約許容表現は $GL_n(\mathbb{Q}_p)$ の既約許容表現の**制限テンソル積** $\Pi^\infty = \bigotimes_p \Pi_p$ で書けることが示される．尖点的保型表現 $\Pi^\infty \subset \mathcal{A}_k$ に対して，$\dim \Pi^U \neq 0$ であるような最大の $U$ を取ると $\dim \Pi^U = 1$ となることが各 $p$ に対する局所理論（導手の理論）から示されるが，この $\Pi^U$ の生成元 $\phi$ が Hecke 固有尖点新形式 $f$ と呼ばれていたものである．よって，重さ $k$ の新形式 $f$ と重さ $k$ の尖点的保型表現 $\Pi$ が 1 対 1 に対応し，各 Hecke 作用素 $T_p$ の固有値 $a_p$ などの情報も既約許容表現 $\Pi^\infty$ に書き込まれている．

もしこのような 1 対 1 対応があるのであれば，なぜわざわざ保型形式の理論を保型表現の理論に書き換えるのか？これには二つの理由が挙げられる．一つ目は，保型表現は局所的な表現の積に分解するが，保型形式は局所的

な関数には分解しないということである．モジュラー形式 $f$ にしても保型形式 $\phi$ にしても，各 $p$ に対する Hecke 固有値 $a_p$ という情報を持っているが，局所的な関数の積には分解しない．しかし表現は局所体上の群 $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ の平滑表現の積に分解するから，大域類体論が局所類体論から再構成されたように，非可換類体論を局所的な理論から構成していく道が開かれる．第二に，**表現は動く**ということがある．保型表現とは保型形式の空間に現れるアデール群の既約表現であるが，同じ表現が保型形式の空間以外の空間にも現れることができる．仮に保型形式そのものに興味があったとしても，その Hecke 固有値の情報は，対応する保型表現が現れてさえいれば保型形式以外の空間からも読み取れるのである．そして，もし保型形式のもつ情報の本質が Hecke 固有値であるとすれば（実際，例えば $L$ 関数は Hecke 固有値だけから定まる），その本質は保型表現にあって，保型形式はその一つの具体的な現れ方でしかなかったという見方もできる（具体的と言っても，保型形式は $GL_n(\mathbb{A})$ の群論のみを用いて内在的に定義されるから，表現を定義する手段であったと見ることもできる）．しかし，この「表現が動く」ということのもっとも衝撃的な応用が，大域 Langlands 対応の志村多様体のコホモロジーへの実現であると思われる．保型表現が Hecke 指標を一般化した形に見えるとしても，保型形式の空間には Galois 群は作用しないから，保型表現が Galois 表現と対応するのは非常に不思議なことである．しかし，類体論の代数幾何学的実現であった**虚数乗法論**をよく見ると，$(\mathbb{A}^\infty)^\times$ の作用するような代数幾何学的対象（虚数乗法を持つ楕円曲線とその等分点の組の集合），すなわち $(\mathbb{A}^\infty)^\times$ と虚 2 次体の Galois 群がともに作用する集合を構成していたことがわかる．この $GL_1$ の場合には対称空間は一点であり保型形式と言っても離散的な集合の上の関数になってしまうから何が起きていたのか読み取りにくいが，$GL_2$ の場合にはこの構成はモジュラー曲線の**コホモロジー群**にあたる．この場合，保型形式そのものはモジュラー曲線の上の正則直線束の切断であり，それらのなす空間に $GL_2(\mathbb{A}^\infty)$ が作用して保型表現を作っているが，同じ表現がモジュラー曲線の特異 (Betti) コホモロジーにも現れるのである．まずコホモロジーに $GL_2(\mathbb{A}^\infty)$ が作用する理由は，モジュラー曲線そのものが $GL_2(\mathbb{A})$ の商の構造を持っているために，あらゆるレベルのモジュラー曲線を同時に考えると，それらの全体に $GL_2(\mathbb{A}^\infty)$ が「作用する」（実際には，Hecke 環の元に対応する代数的対応である **Hecke 対応**が作られる；本報告集の三枝氏の解説を参照）からである．多様体そのものに作用があれば，コホモロジー理論の関手性によってあらゆるコホモロジー群に対しても作用することになり，直線束の大域切断（0 次の de Rham コホモロジー）以外のコホモロジーに「表現が動く」可能性が出てくる．つまり，モジュラー曲線の $\ell$ **進エタールコホモロジー**（$\ell$ 進 Galois 表現に値をもつコホモロジー理論）を用いると，$GL_2(\mathbb{A}^\infty)$ と Galois 群 $G_{\mathbb{Q}}$ がともに作用するベクトル空間ができる．さらに，対称空間の Betti コホモロジーは，定数層を微分形式の層で分解する de Rham の定理を用いると，関数の大域切断と「局所的な」（接空間の）コホモロジー理論，すなわちリー環の相対コホモロジー（**$(\mathfrak{g}, U_\infty)$-コホモロジー**）に分解される（コンパクト商の場合には松島与三・村上信吾の 1960 年代初期の先駆的な研究 [MM] で示され，現在でも**松島の公式**と呼ばれている）．このことから，Betti コホモロジーへの $GL_2(\mathbb{A}^\infty)$ の表現は保型表現であることがわかり，0 次の de Rham コホモロジーから 1 次の Betti コホモロジーへ「表現が動いた」．さらに，体同型 $\iota : \overline{\mathbb{Q}}_\ell \cong \mathbb{C}$ の下で Betti コホモロジーと $\ell$ 進エタールコホモロジーは関手的に同型であるから（**比較同型**），$GL_2(\mathbb{A}^\infty)$ の保型表現は $\ell$ 進エタールコホモロジーにも現れることがわかる．このように保型表現は，保型形式の空間を遠く離れて，志村多様体のエタールコホモロジーの空間まで旅をして乗り移ることができるのである．

ここでは，保型表現という，有限群の有限次元表現論とはかなり様子の異なる表現論，すなわち **Lie 群・代数群の（無限次元）表現論**という対象が現れた．このような表現論では，有限次元の世界に比べて，異なる群の表現の間の誘導が違う形で重要になる．とくに，指数有限からは程遠い放物型部分群からの誘導（**放物型誘導**）によって，極大トーラスという可換な群の表現から始めて，順次大きな非可換の群の無限次元表現を作る操作が重要になる．このような方針で Lie 群・代数群の表現論を整理するのは，主に Harish-Chandra のこれも 1950 年代に遡る哲学であると思われる．この放物型誘導による表現の分類の原理を Harish-Chandra から受け継いで保型表現や局所体上の代数群の平滑表現に体系的に適用したのは Langlands であり (**Langlands 和** $\pi_1 \boxplus \cdots \boxplus \pi_n$)，その分類が Galois 表現のような有限次元表現の直既約分解と似た構造を持っていることが，Langlands 対応の定式化の基礎になった．

## 3.2　代数幾何学と表現

前節で志村多様体のコホモロジーを通して保型表現と Galois 表現が結びつく話まで進んだが，これは，Langlands 対応で結びつく三つの世界の最後の一つである**モチーフ**の話につながる（ここでは Grothendieck の考察した古典的モチーフ，とくに純モチーフのみを考える）．与えられた体 $F$ の上の代数幾何学は，代数的整数論や保型表現などと全く関わりなく独立の興味・動機づけと体系をもった数学の一分野であり，一言で言えば，$F$ 上の**代数多様体**（$F$ 係数の有限個の有限変数多項式で定義される図形）を幾何学的に調べる学問である．幾何学には，図形を切る・貼る・変形する・並べて族にする・逆に断面図の族を作る・丸めてコンパクト化する・分類空間（モジュライ）を作る…など，人間が図形に対して行いうるあらゆる操作を反映した手法があるから，図形をどのように分類して理解したいのかア・プリオリに目的が決まっているとは思えないが，ここでは第 1 節で触れた線形化による理解，すなわち**コホモロジー関手**（$F$ 上の代数多様体の圏 $(\mathrm{Var}/F)$ から $(\mathrm{Vect}\,/K)$ への反変関手 $X \mapsto H(X)$）を用いて幾何学的性質を捉える理論を考える．代数幾何学のうち，この考え方に全く関わりのない分野はあまり見当たらない（線形代数のみが「完全に理解された」数学であるという仮定に立てば自然なことかもしれないが）．幾何学的に興味のある量はふつう大域的な不変量（図形を自明な形になるまで細かく切ってしまうとなくなってしまう量）であり，それらがベクトル空間で捉えられるのがコホモロジー関手であるから，多くの場合コホモロジー理論には局所から大域に移行する**層**の機構が伴う．またコホモロジー関手の値域は $(\mathrm{Vect}\,/K)$ であるが，より情報量の多い層の理論をもつコホモロジー理論は，さまざまな付加構造を持ったベクトル空間に値をもつ．もっとも基本的な形のコホモロジーでも，コホモロジー群には次数があるから，次数つき (graded) ベクトル空間の圏への関手だと言える．有限次元ベクトル空間に付加構造が入るというのであるから，第 1 節で見たように $(\mathrm{Vect}\,/K)$ の自然な一般化として，ある群の表現の圏 $(G\text{-Rep}/K)$ が現れると考えるのが自然である．とくに，ふつうのコホモロジー理論には，$H(X \amalg Y) = H(X) \oplus H(Y)$, $H(X \times Y) = H(X) \otimes H(Y)$（Künneth の公式），Poincaré 双対性など自然な性質が備わっているから，幾何学的な意味をもつ操作が $(G\text{-Rep}/K)$ のもつ圏論的な操作に対応すると考えられる．Grothendieck とその共同研究者たちは，このようにコホモロジー理論の値域となるべき「付加構造つきベクトル空間の圏」の持つべき性質を公理化して（**淡中圏**），それらが必ずある副代数群 $G$ の有限次元表現の圏となることを示した．例えば **Hodge 構造**のなす圏 $(G = \mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mathbb{G}_m)$ などがその基本的な例になる．コホモロジー理論の間に関手的な射がある場合は対応する副代数群の間に射ができるから，あらゆるコホモロジー理論の総元締めになるべき群（**モチヴィック Galois 群**）が存在すると予想された．しかし，このような群 $G$ が一足飛びに見つかることはなかった．

さまざまなコホモロジー理論として，例えば Betti コホモロジー $(F = \mathbb{C},\ K = \mathbb{Q})$ は Hodge 構造，de Rham コホモロジー $(K = F)$ はフィルトレーションつきベクトル空間，そして $\ell$ 進エタールコホモロジー $(K = \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ は $F$ の $\ell$ 進 Galois 表現を与え，それぞれの間に比較同型がある．代数多様体から作られるこうした付加構造つきベクトル空間たちが群の有限次元表現のように既約な対象に分解し，コホモロジー論的な原子・分子のようなものがあるように見える．各コホモロジー理論にはサイクル類があるから，代数多様体 $X$ に対して $X \otimes X$ のサイクル（代数的対応）の定める $H(X \times X)$ のサイクル類を取り，Künneth の公式と Poincaré 双対を用いて $H(X \times X) \cong \mathrm{End}(H(X))$ の元と考えることで，代数的対応は $H(X)$ の既約分解の射影子を与えることができる．例えば代数的対応が代数的サイクルのなす環（Chow 環）のベキ等元であれば，どのコホモロジー理論においても射影子を与えることが従う．Grothendieck は，代数多様体と代数的サイクルの組を用いて $F$ 上の**モチーフ**の圏 $(\mathrm{Mot}/F)$ を定義し，あらゆるコホモロジー理論がモチーフの圏を経由するようにできると考え，これを可能にするための代数的サイクルに関する予想（スタンダード予想）を定式化したが，これらの予想は未だ解かれていない.（スタンダード予想が解かれれば，先に述べたモチヴィック Galois 群 $G$ の存在も従い，既約モチーフは $G$ の有限次元既約表現と 1 対 1 に対応することになる.）

しかし，代数体 $F$ のように絶対 Galois 群 $G_F$ が充分に大きい場合は，$\ell$ 進エタールコホモロジーによる $\ell$ 進 Galois 表現の圏がモチーフの圏を充満部分圏として捉えているはずだ，と主張するのが代数的サイクルに関する

**Tate 予想**である．つまり，$\ell$ 進エタールコホモロジーの Galois 表現としての既約分解はかならず代数的対応によって与えられるであろうというのである．(Abel 多様体のモチーフに限って考えれば，これに対応する予想が Faltings によって解かれている．) モチーフから来る，つまり代数体上の代数多様体の $\ell$ 進エタールコホモロジーとして現れるような $\ell$ 進 Galois 表現は必ず，次節に述べる**代数的**という条件をみたすことが示されているが，この条件がモチーフから来る Galois 表現を特徴づけるだろうというのが **Fontaine-Mazur 予想** [FM] であった．つまり，代数的整数論の対象である代数的 Galois 表現の圏は，代数体上の代数幾何学をぴったりと捉える枠組みとしても自然に要求されているのである．このような背景をもとに考えると，Langlands 対応を確立するために，Galois 表現を実現しているモチーフ（代数多様体のエタールコホモロジー）であって保型表現と結びつくもの，すなわち志村多様体のコホモロジーが用いられたのは自然な流れであった．

この文脈での表現論的な視点に関連して二つ注意しておく．まず，モチーフや Tate 予想などと言っても，0 次元多様体のモチーフに関してはふつうの Galois 理論に他ならない．Galois 理論は $F$ 上の有限エタール代数の圏と $G_F$ の作用する有限集合の圏の間の圏同値を与えているが，前者は言い換えれば $F$ 上の 0 次元固有平滑代数多様体 $X$（「1 変数代数方程式」）であり，その 0 次エタールコホモロジーは後者の有限集合（「根の集合」）を基底とする置換表現である．Galois 理論の本質は，Galois 群の作用が引き起こす根の間の置換が $F$ 係数有理式で与えられるということであるが，これは置換表現の既約表現への分解を与える射影子が $F$ 上の代数多様体としての射 $X \to X$（代数的サイクル）で実現されると言っているのだから，Tate 予想に他ならない．モチヴィック Galois 群という構想はこの Galois 理論の洞察を無限大に拡大したものとも言える．第二に，コホモロジー群あるいはモチーフが代数多様体の大域的情報を線形化する理論であるとすれば，局所的な線形化関手が層の理論である．コホモロジー群とは自明な代数多様体（1 点）の上の層であると考えれば，コホモロジー関手とは代数多様体上の層を構造射によって 1 点に押したものであり，より一般的に代数多様体の間の任意の射 $f : X \to Y$ に対して層の押し出しを考えることができる．つまりコホモロジー理論の背景にはあらゆる射に関する層の関手性（「6 つの演算」）がある．表現論的に既約分解が起きるという現象がコホモロジー群において考えられるとすれば，それは層のレベルでも実現しているはずである．このような局所化が Deligne によるスタンダード予想を用いない Weil 予想の解決に用いられており，またより一般に $D$ 加群や偏屈層の理論として定式化されている．純モチーフの世界は固有平滑代数多様体のみでも作ることができ，スタンダード予想はそれらのつるつるな多様体上の大域的サイクルの存在を予言するという，幾何学的に取っ掛かりの見えない予想であるが，局所化された「重さの哲学」が開多様体や特異多様体の世界にも浸透していることが，多様体を退化させたり切り開いたりしたときの挙動を用いる自由度を与える．保型表現とつながる志村多様体の理論でも，開多様体の交叉コホモロジー・$L^2$ コホモロジーが重要であった（古典的なモジュラー曲線でさえそうである；モジュラー形式・保型形式の定義には無限遠点での増大条件があった）．$GL_n$ という群は豊富に放物型部分群を持っているから（これが Langlands 対応にとっては必要である），$GL_n$ の保型表現においてはどうしても「無限遠・境界での挙動」の処理が必要になる．放物型部分群を持たない内部型を用いることで志村多様体としては固有平滑なものに移っても,「隠れた境界」としてのエンドスコピーの現象が残り，それを扱う基本補題の証明にはやはり偏屈層の理論が活躍する⋯．

# 4 Langlands 対応入門

類体論の証明においても非可換類体論の（部分的な）証明においても，基礎体を上げ下げする議論は決定的であり，あらゆる代数体に対して同様の理論が成立することは本質的に重要であるように見える．有理数体 $\mathbb{Q}$ の類体論のみはステートメント・証明ともに $\mathbb{Q}$ 上の議論でほぼ完結するが，$p$ 進体 $\mathbb{Q}_p$ の Artin 写像を内在的に特徴づけるにはすでに拡大体への底変換が使われる．

一般に体 $F$ に対してその分離閉包 $\overline{F}$ を一つとり，**絶対 Galois 群**を $G_F := \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ で表す．以後 $F$ を**代数体**（$\mathbb{Q}$ の有限次拡大体）とする．$u$ を $\mathbb{Q}$ の素点，すなわち素数 $\ell$ または $\infty$ とする ($\mathbb{Q}_\infty = \mathbb{R}$)．$F$ 代数の射の集合 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(F, \overline{\mathbb{Q}}_u)$ は $[F : \mathbb{Q}]$ 個の元を持ち，$\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_u/\mathbb{Q}_u)$ の左作用を持つ（$\tau \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(F, \overline{\mathbb{Q}}_u)$ および $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_u/\mathbb{Q}_u)$

に対し $\tau \mapsto \sigma \circ \tau$）．この作用の軌道 $v$（商集合 $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_u/\mathbb{Q}_u)\backslash \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(F, \overline{\mathbb{Q}}_u)$ の元）を $F$ の $u$ を割る**素点**と呼んで $v \mid u$ と表し，また $\tau$ の軌道を $v(\tau)$ と表す．$\tau(F)$ の $\overline{\mathbb{Q}}_u$ における閉包は $\mathbb{Q}_u$ の有限次拡大として（$\mathbb{Q}_u$ 同型を除いて）定まるから，これを $F$ の $v$ での**完備化** $F_v$ という．この定義より直ちに：

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(F, \overline{\mathbb{Q}}_u) = \coprod_v \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_u}(F_v, \overline{\mathbb{Q}}_u), \quad [F:\mathbb{Q}] = \sum_{v|u} [F_v : \mathbb{Q}_u]$$

であり，また $F_u := F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_u \cong \prod_{v|u} F_v$ である．素数 $p$ に対して $v \mid p$ のとき $v$ を**有限素点**といい，$v \mid \infty$ のとき**無限素点**という．無限素点は，$F_v = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ に従って**実**または**複素**素点と呼ばれる．無限素点 $v$ に対して $F_v^\times$ の単位元の連結成分（$v$ が実なら $\mathbb{R}^\times_{>0}$，複素なら $\mathbb{C}^\times$）を $F_v^{\times 0}$ で表す．$F_\infty^\times = \prod_{v|\infty} F_v^\times$ の単位元の連結成分は $F_\infty^{\times 0} := \prod_{v|\infty} F_v^{\times 0}$ である．$F$ の**有限アデール環・アデール環**を $\mathbb{A}_F^\infty := F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{A}^\infty$，$\mathbb{A}_F := F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{A}$ で定める．$F$ の**整数環**（$F$ での $\mathbb{Z}$ の整閉包）を $\mathcal{O}_F$，その副有限完備化を $\widehat{\mathcal{O}}_F := \mathcal{O}_F \otimes_{\mathbb{Z}} \widehat{\mathbb{Z}} = \varprojlim_N \mathcal{O}_F/(N)$ とすると，$\mathbb{A}_F^\infty = F \otimes_{\mathcal{O}_F} \widehat{\mathcal{O}}_F$ である．$\mathbb{A}_F = \mathbb{A}_F^\infty \times F_\infty$ である．$F$ 代数の構造射 $F \to \mathbb{A}_F$ は $F^\times \subset \mathbb{A}_F^\times$ を定め，また $(\mathbb{A}_F^\infty)^\times$ は $\widehat{\mathcal{O}}_F^\times$ を開部分群とする局所副有限群だから全不連結（単位元の連結成分は $\{1\}$）なので，$\mathbb{A}_F^\times$ の単位元の連結成分は $F_\infty^{\times 0}$ である．$F = \mathbb{Q}$ の場合と同様に $\mathbb{A}_F^\times \subset \prod_v F_v^\times$ で各 $v$ に対して $F_v^\times \to \mathbb{A}_F^\times$（単射）ができる．

素点 $v = v(\tau)$ に対し $\tau : F \to F_v \to \overline{\mathbb{Q}}_u = \overline{F}_v$ は $\overline{F} \to \overline{F}_v$ に延長でき，射 $G_{F_v} \to G_F$ が共役を除いて定まる．この射は単射であることが示せる（近似定理・Krasner の補題）．とくに射 $G_{F_v}^{\mathrm{ab}} \to G_F^{\mathrm{ab}}$ は一意に定まり，これも単射となる．

本稿では素数 $p$ に対する $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大 $K$ を**局所体**と呼ぶ．局所体 $K$ における $\mathbb{Z}_p$ の整閉包 $\mathcal{O} = \mathcal{O}_K$ を $K$ の**整数環**といい，これは DVR になる．その極大イデアルを $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_K$ で表し，剰余体を $k := \mathcal{O}/\mathfrak{p} \cong \mathbb{F}_q$ とする．$\mathfrak{p}$ の生成元を $K$ の**素元**といい，**付値** $v = v_K : K^\times/\mathcal{O}^\times \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}$ を素元 $\varpi$ に対し $v(\varpi) = 1$ で定める．$K^{\mathrm{ur}} := \bigcup_{(p,N)=1} K(\boldsymbol{\mu}_N)$ を $K$ の**最大不分岐拡大**という．$K^{\mathrm{ur}}$ における $\mathcal{O}$ の整閉包 $\mathcal{O}^{\mathrm{ur}}$ は $\mathfrak{p}\mathcal{O}^{\mathrm{ur}}$ を極大イデアル，$\overline{k}$ を剰余体とする DVR になる．**Hensel の補題**（$(p,N) = 1$ ならば $\boldsymbol{\mu}_N \subset k \iff \boldsymbol{\mu}_N \subset K$）によって，同型

$$\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ur}}/K) \ni \sigma \longmapsto \sigma|_{\mathcal{O}^{\mathrm{ur}}} \bmod \mathfrak{p} \in G_k$$

ができる．$G_k$ の位相的生成元 $(x \mapsto x^q)^{-1}$ に対応する左辺の元を $\mathrm{Frob}_K \in \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ur}}/K)$ で表し，**幾何的 Frobenius 元**という．$I_K := G_{K^{\mathrm{ur}}} = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K^{\mathrm{ur}})$ を $K$ の**惰性群**という．Galois 拡大 $L/K$ で $K^{\mathrm{ur}} \subset L \subset \overline{K}$ なるものに対し，$\mathrm{Gal}(L/K)$ の部分群 $W(L/K) := \{\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K) \mid \sigma|_{K^{\mathrm{ur}}} \in \mathrm{Frob}_K^{\mathbb{Z}}\}$ を定める．射 $v = v_K : W(L/K)/\mathrm{Gal}(L/K^{\mathrm{ur}}) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}$ を $\sigma|_{K^{\mathrm{ur}}} = \mathrm{Frob}_K^{v(\sigma)}$ で定め，また $W(L/K)$ には $\mathrm{Gal}(L/K^{\mathrm{ur}})$ を開部分群とする局所副有限位相を定める．とくに $W_K := W(\overline{K}/K)$ を $K$ の **Weil 群**という．このとき $W_K^{\mathrm{ab}} = W(K^{\mathrm{ab}}/K)$ である．有限次拡大 $K'/K$ に対して $W_{K'} \subset W_K$ である．$K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ に対しても，便宜上 $W_K = G_K$ と定める．

代数体 $F$ の有限素点 $v$ に対して，局所体 $F_v$ の整数環などを $\mathcal{O}_v, \mathfrak{p}_v, k_v, q_v, \varpi_v, G_v, \mathrm{Frob}_v, I_v, W_v$ などで表す．

## 4.1 $\ell$ 進指標の類体論（$GL_1$ の Langlands 対応）

さて，まずは類体論のステートメントを述べる．

**定理 4.1** (i) （**局所類体論**）$K$ を局所体とする．群準同型 $\mathrm{Art}_K^{-1} : W_K \to K^\times$ であって，(1) $v \circ \mathrm{Art}_K^{-1} = v$, (2) 任意の有限次 Abel 拡大 $K'/K$ に対し $\mathrm{Art}_K^{-1}(W_{K'}) = N_{K'/K}(K'^\times)$，の二条件をみたすものがただ一つ存在する（**局所 Artin 写像**）．これは同型 $W_K^{\mathrm{ab}} \xrightarrow{\cong} K^\times$（従って $\mathrm{Art}_K : K^\times \xrightarrow{\cong} W_K^{\mathrm{ab}}$）を導き，また任意の有限次拡大 $K'/K$ に対して $W_{K'}$ の上で $N_{K'/K} \circ \mathrm{Art}_{K'}^{-1} = \mathrm{Art}_K^{-1}$ をみたす（**$GL_1$ の局所底変換**）．

(ii) （**大域類体論**）$F$ を代数体とし，$F$ の各素点 $v$ に対し，$F_v$ の局所 Artin 写像を $\mathrm{Art}_v$ とする（$v$ が無限なら $\mathrm{Art}_v : F_v^\times/F_v^{\times 0} \cong W_v$）．群準同型 $\mathrm{Art}_F : \mathbb{A}_F^\times \to G_F^{\mathrm{ab}}$ であって $\mathrm{Art}_F|_{F_v^\times} = \mathrm{Art}_v$ をみたすものがただ一

つ存在する（**大域 Artin 写像**；$W_v^{\mathrm{ab}} \subset G_v^{\mathrm{ab}} \subset G_F^{\mathrm{ab}}$ に注意せよ）．これは同型 $\mathrm{Art}_F : \mathbb{A}_F^\times / \overline{F^\times F_\infty^{\times 0}} \cong G_F^{\mathrm{ab}}$ を導く（ここで $\overline{F^\times F_\infty^{\times 0}}$ は $F^\times F_\infty^{\times 0}$ の $\mathbb{A}_F^\times$ における閉包である）．

上の形での局所類体論については，例えば [Y] がある．大域類体論では，$\mathrm{Art}_F : \mathbb{A}_F^\times \to G_F^{\mathrm{ab}}$ の構成自体は，$G_F^{\mathrm{ab}}$ が有限群の逆極限であって各有限群への射としては $\prod_v \mathrm{Art}_v$ が有限積になることから直ちに従う．むずかしいのは後半の主張である．イデール類群の単位元の連結成分が閉でないのは気がかりだが，これを表現（指標）に移って記述すれば，次のように書ける（ここでは表現・指標はつねに**連続**であるとする．現れる位相群の位相はつねに Hausdorff だから，指標の核は閉部分群である）．ここでもイデール類群 $\mathbb{A}_F^\times / F^\times$ の連続指標を **Hecke 指標**と呼び，いずれも対応は $\Pi = R \circ \mathrm{Art}_F$ である：

$$\left\{ \begin{array}{c} G_F^{\mathrm{ab}}\text{の指標} \\ R : G_F \to \mathbb{C}^\times \end{array} \right\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{c} \textbf{重さ (0)} \text{ の Hecke 指標} \\ \Pi : F^\times \backslash \mathbb{A}_F^\times \to \mathbb{C}^\times, \ \ \Pi_\infty|_{F_\infty^{\times 0}} = 1 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} G_F^{\mathrm{ab}}\text{の指標} \\ R : G_F \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times \end{array} \right\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{c} \ell \text{ 進 Hecke 指標} \\ \Pi : F^\times \backslash \mathbb{A}_F^\times \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times \end{array} \right\}$$

1 行目の左辺は，第 2 節でみたように副有限群から $\mathbb{C}^\times$ への指標だから有限像であり，右辺は大域類体論によって左辺と対応する．2 行目は有限像でない指標を大量に含んでいるが，今度は右辺で $\overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ が全不連結であることから，単位元の連結成分が自動的に核に入り $\Pi_\infty|_{F_\infty^{\times 0}} = 1$ がみたされるからやはり大域類体論によって左辺と対応する．しかし $\ell$ 進 Hecke 指標の一般化（$\ell$ **進保型表現**）はまだ暫定的な定義が与えられている程度であり，また保型表現の理論は $\mathbb{C}$ 係数の場合にその本領を発揮するので（$L$ 関数の解析的理論など），Hecke 指標としてはあくまで $\mathbb{C}$ 係数のものを考えたい．そこで，第 2 節にみたように**代数的な** Hecke 指標に関しては $\ell$ 進 Hecke 指標との対応が作られることから，代数的 Galois 指標と代数的 Hecke 指標との間の対応を与えたものが $GL_1$ の大域 Langlands 対応ということになる．

Hecke 指標 $\Pi : \mathbb{A}_F^\times \to \mathbb{C}^\times$ を考える．$\mathbb{A}_F^\times = (\mathbb{A}_F^\infty)^\times \times F_\infty^\times$ だから，**有限成分** $\Pi^\infty := \Pi|_{(\mathbb{A}_F^\infty)^\times}$ および**無限成分** $\Pi_\infty := \Pi|_{F_\infty^\times}$ によって $\Pi = \Pi^\infty \otimes \Pi_\infty$ と書ける．有限成分は局所副有限群の指標であるから，ある開部分群 $U \subset \widehat{\mathcal{O}}_F^\times$ による商 $(\mathbb{A}_F^\infty)^\times / U$ を経由する．この $U$ は $\widehat{\mathcal{O}}_F^\times$ の副有限位相の定義によって $\mathcal{O}_F$ のイデアル $\mathfrak{m}$ に対して $\mathrm{Ker}(\widehat{\mathcal{O}}_F^\times \to (\mathcal{O}_F/\mathfrak{m})^\times)$ を含み，そのような最大の $\mathfrak{m}$ は古典的 Hecke 指標の**モジュラス**にあたる．とくに，ほとんどすべての有限素点 $v$ に対して $\mathcal{O}_v^\times \subset U$ である．（この $U$ は $GL_2$ などの保型形式における**レベル**にあたる．）各素点 $v$ での**局所成分** $\Pi_v := \Pi|_{F_v^\times}$ が定まり，ほとんどすべての有限素点で $\Pi_v$ は $v : F_v^\times / \mathcal{O}_v^\times \cong \mathbb{Z}$ を経由する（このとき $\Pi_v$ は**不分岐**であるという）．局所成分によって $\Pi^\infty$ は完全に定まるから，$\Pi^\infty = \bigotimes_v \Pi_v^\times$ と書く．

$\ell$ 進 Hecke 指標 $\Pi : F^\times \backslash \mathbb{A}_F^\times \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ に対しても，ほぼ同様の議論によって次がわかる (例えば [Se], III.2.2). $\widehat{\mathbb{Z}}^\ell := \varprojlim_{(\ell,N)=1} \mathbb{Z}/(N) \cong \prod_{p \neq \ell} \mathbb{Z}_p$, $\widehat{\mathcal{O}}_F^\ell := \mathcal{O}_F \otimes_{\mathbb{Z}} \widehat{\mathbb{Z}}^\ell$, $\mathbb{A}_F^{\infty,\ell} := F \otimes_{\mathbb{Z}} \widehat{\mathbb{Z}}^\ell$ と定めると，$\Pi^{\infty,\ell} := \Pi|_{(\mathbb{A}_F^{\infty,\ell})^\times}$ はある開部分群 $U \subset (\widehat{\mathcal{O}}_F^\ell)^\times$ による商 $(\mathbb{A}_F^{\infty,\ell})^\times / U$ を経由し，とくにほとんどすべての有限素点 $v$ に対して $\Pi_v := \Pi|_{F_v^\times}$ は不分岐である．

$\mathbb{C}$ 係数の Hecke 指標 $\Pi : F^\times \backslash \mathbb{A}_F^\times \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ に戻る．$v$ を無限素点とするとき，各 $\tau \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(F_v, \mathbb{C})$（実ならば一つ，複素ならば二つ）に対して整数 $a_\tau \in \mathbb{Z}$ が存在して，

$$\Pi_v(x_v) = \prod_{\tau \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(F_v, \mathbb{C})} \tau(x_v)^{-a_\tau} \qquad (\forall x_v \in F_v^{\times 0})$$

と書けるとき，$\Pi_v$ は**代数的**であるという．すべての無限素点 $v$ に対して $\Pi_v$ が代数的であるような Hecke 指標 $\Pi$ を**代数的 Hecke 指標**といい，$[F : \mathbb{Q}]$ 個の $\tau \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(F, \mathbb{C})$ でラベルづけられた整数の組 $(a_\tau)$ を $\Pi$ の**重さ**という．重さ $(a_\tau)$ の代数的 Hecke 指標 $\Pi$ および体同型 $\iota : \overline{\mathbb{Q}}_\ell \cong \mathbb{C}$ に対し，対応する $\ell$ 進 Hecke 指標を

$$\Pi_\iota : \mathbb{A}^\times \ni x \longmapsto \iota^{-1}\Bigl(\Pi(x) \cdot \prod_{\tau \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(F,\mathbb{C})} \tau(x_{v(\tau)})^{a_\tau}\Bigr) \cdot \prod_{\tau \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(F,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)} \tau(x_{v(\tau)})^{-a_{\iota\circ\tau}} \in \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$$

で定めることができる．この $\Pi_\iota$ が $F^\times\backslash\mathbb{A}_F^\times$ を経由することは直ちにわかる．また $\ell,\infty$ を割らない素点 $v$ に対しては $(\Pi_\iota)_v=\iota^{-1}\circ\Pi_v$ である．有限素点 $v$ に対しては $\Pi_v$ は離散群を経由するから，$(\Pi_\iota)_v$ も連続であることがわかる（$\ell$ を割るときは整数乗という連続関数がかかるだけである）．無限素点 $v$ に対しては $(\Pi_\iota)_v$ は有限群を経由するので連続だから，結局これらの積 $\Pi_\iota$ は連続指標である．

さて Galois 側に移る．大域類体論によって $\Pi=R\circ\mathrm{Art}_F$ であるとき，$\mathrm{Art}_F$ の特徴づけによって，各素点 $v$ に対して $R_v:=R|_{W_v}$ とすると $\Pi_v=R_v\circ\mathrm{Art}_v$ である．とくに，局所 Artin 写像の性質 (1) によって $\Pi_v$ が不分岐であれば $R_v$ も**不分岐**，すなわち $v:W_v/I_v\cong\mathbb{Z}$ を経由し，$\Pi_v(\varpi_v)=R_v(\mathrm{Frob}_v)$ をみたす（**相互法則**）．上に見たように $\ell$ 進 Hecke 指標はほとんどすべての素点で不分岐であったから，大域類体論の帰結として，任意の $\ell$ 進指標 $R:G_F\to\overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ はほとんどすべての素点で不分岐であることがわかる．これは高次元の $\ell$ 進 Galois 表現においては（$\ell$ で de Rham であっても）成り立たないので，代数的 Galois 表現の定義で要求することになる．さて重さ $(a_\tau)$ の代数的 Hecke 指標 $\Pi:F^\times\backslash\mathbb{A}_F^\times\to\mathbb{C}^\times$ と体同型 $\iota:\overline{\mathbb{Q}}_\ell\cong\mathbb{C}$ に対して $\Pi_\iota=R\circ\mathrm{Art}_F$ によって $\ell$ 進 Galois 指標 $R$ を定める．このとき，$v$ を $\ell$ を割る素点とし，各 $\tau\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_\ell}(F_v,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ に対して $b_\tau:=a_{\iota\circ\tau}$ とすると，ある開部分群 $U\subset\mathcal{O}_v^\times$ が存在して，

$$R_v\circ\mathrm{Art}_v(x_v)=\prod_{\tau\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_\ell}(F_v,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)}\tau(x_v)^{-b_\tau}\qquad(\forall x_v\in U)$$

となる．このような整数の組 $(b_\tau)$ が存在するとき $R_v$ は**代数的**であるといい，$\ell$ を割るすべての素点で $R_v$ が代数的であるような $\ell$ 進 Galois 指標 $R$ を**代数的 Galois 指標**といい，$[F:\mathbb{Q}]$ 個の $\tau\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(F,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ でラベルづけられた整数の組 $(b_\tau)$ を $R$ の**（Hodge-Tate の）重さ**という.（ここでは代数的な $R_v$ の定義を $\mathrm{Art}_v$ を経由して行ったが，局所体の Galois 表現の理論の枠内で定義することも可能であり，$G_v$ の $\ell$ 進指標 $\rho$ に対しては，Hodge-Tate, de Rham，潜半安定，潜クリスタリンの各定義が $\rho|_{W_v}$ が代数的であることと同値になる．本報告集の中村氏の解説を参照.）とくに，大域類体論によって，重さ (0) の代数的 Galois 指標はすべて有限像であることが従う．

以上をまとめて次を得る：

**定理 4.2** （**$G_F$ の $\ell$ 進指標の類体論**）素数 $\ell$ と体同型 $\iota:\overline{\mathbb{Q}}_\ell\overset{\cong}{\to}\mathbb{C}$ を固定する．代数的 Hecke 指標 $\Pi:\mathbb{A}_F^\times\to\mathbb{C}^\times$ と代数的 $\ell$ 進指標 $R:G_F\to\overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ は，$\ell$ を割らないすべての有限素点 $v$ に対して $\Pi_v=\iota\circ R_v\circ\mathrm{Art}_v$（とくに $\Pi_v$ が不分岐な素点では $\Pi_v(\varpi_v)=\iota\circ R_v(\mathrm{Frob}_v)$）をみたすように互いに一対一に対応する．このとき $\Pi$ の重さ $(a_\tau)$ と $R$ の Hodge-Tate の重さ $(b_\tau)$ は $a_{\iota\circ\tau}=b_\tau$ をみたす．

また，局所類体論の底変換からただちに大域類体論の底変換が従う，すなわち代数体の有限次拡大 $F'/F$ に対して $N_{F'/F}:\mathbb{A}_{F'}^\times\to\mathbb{A}_F^\times$ が各素点での完備化のノルムの積として定義され，イデール類群の間の射を誘導するが，これは Galois 群の自然な射 $G_{F'}^{\mathrm{ab}}\to G_F^{\mathrm{ab}}$ に対応する．これを指標の間の対応に移すと，Galois 表現 $R:G_F\to GL(V)$ を部分群 $G_{F'}$ に制限したものを $R|_{F'}$ で表すことにすれば，$\Pi\leftrightarrow R$ ならば $\Pi\circ N_{F'/F}\leftrightarrow R|_{F'}$ と表せる（**$GL_1$ の大域底変換**）．例えば，$\mathbb{Q}$ 上の対応 $|\cdot|\leftrightarrow\chi_\ell$ を任意の代数体 $F$ に底変換すると $F$ 上でも $|\cdot|\leftrightarrow\chi_\ell$ となり（$F$ 上では $|\cdot|:\mathbb{A}_F^\times\to\mathbb{R}_{>0}^\times$ は $|\cdot|\circ N_{F/\mathbb{Q}}$ で定義され，$\chi_\ell$ も同様に $\chi_\ell|_F$ で定義される），この指標の重さは $(-1)$ である．一般に底変換によって重さは変わらず，$R$ の重さが $(b_\tau)$ であれば，$R|_{F'}$ の重さは $(b_{\tau'|_F})$ となる．

さて，$\mathbb{Q}$ 上の代数的 Hecke 指標は絶対値 $|\cdot|$ の整数乗と Dirichlet 指標の積で表されたが，一般の代数体上でも代数的 Hecke 指標はそれほど多くない．重さ $(a_\tau),(a'_\tau)$ の代数的 Hecke 指標 $\Pi,\Pi'$ の積 $\Pi\cdot\Pi'$ は重さ $(a_\tau+a'_\tau)$ を持つから，同じ重さの代数的 Hecke 指標の比は必ず重さ (0) である．さらに重さも自由には選べない．例えば $F$ が**総実体**（すべての無限素点が実素点であるような代数体）であれば，$\mathbb{Q}$ の場合と同じように代数的 Hecke 指標は絶対値の整数乗と重さ (0) の指標の積しかなく，常にすべての $a_\tau$ は等しいのである．総実体および総実体の総虚（すべての無限素点が複素素点）な 2 次拡大体をあわせて **CM 体**と呼ぶ．CM 体 $F$ に対し $F^+$ を最大総実部分体とするとき，$c\in\mathrm{Gal}(F/F^+)$ を $F=F^+$ ならば単位元，$F\neq F^+$ ならば単位元でない方の元とすると，複素共役 $c\in\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ および任意の $\tau\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(F,\mathbb{C})$ に対して $c\circ\tau=\tau\circ c$ である．絶対値以外に，重さ (0) でな

い新しい代数的 Hecke 指標が現れるのは総実体の CM2 次拡大 $F/F^+$ においてのみであることを主張するのが以下の定理の (ii) である．このことから，代数的 Hecke 指標の各有限素点 $v$ での「Hecke 固有値」$\Pi_v(\varpi_v)$ は非常に特別なタイプの代数的数になることが従う．素数べき $q$ に対し，代数体 $E$ の元 $x$ は，任意の $\tau \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(E, \mathbb{C})$ に対して $\tau(x)\tau(x)^c = q$ をみたすとき **Weil $q$-数**と呼ばれる．次の定理の (i),(ii) はいずれもイデール類群の構造（類数の有限性・Dirichlet の単数定理）の簡単な帰結である（例えば [F], 1.3）．

**定理 4.3** $\Pi : F^\times \backslash \mathbb{A}_F^\times \to \mathbb{C}^\times$ を重さ $(a_\tau)$ の代数的 Hecke 指標とする．

(i) （**代数性**）代数体 $E$ と $\lambda \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(E, \mathbb{C})$ が存在し，すべての有限素点 $v$ に対して指標 $\pi_v : F_v^\times \to E^\times$ が存在して $\Pi_v = \lambda \circ \pi_v$．とくに $\mathrm{Im}\,\Pi^\infty \subset \lambda(E)^\times$．

(ii) （**分類定理**）(1) $F$ を CM 体とする．ある整数 $w$ が存在し任意の $\tau$ に対し $a_\tau + a_{c\circ\tau} = w$ となる．とくに $F$ が総実ならば $2a_\tau = w\ (\forall\tau)$ だから，重さ (0) の Hecke 指標 $\Pi'$ が存在して，$\Pi = \Pi' \cdot |\cdot|^{-w/2}$ と書ける．
(2) $F_0$ を $F$ の最大 CM 部分体とすると，$F_0$ の代数的 Hecke 指標 $\Pi_0$ と $F$ の重さ (0) の Hecke 指標 $\Pi'$ が存在して $\Pi = \Pi' \cdot (\Pi_0 \circ N_{F/F_0})$．とくに $a_\tau$ は $\tau_0 := \tau|_{F_0}$ にしか依存せず，整数 $w = a_\tau + a_{c\circ\tau}$ は一定である．

(iii) （**$GL_1$ の Ramanujan 予想**）$\Pi_v$ が不分岐ならば $\Pi_v(\varpi_v)$ は Weil $q_v^w$-数である．

この定理に $\ell$ 進指標の類体論を組み合わせて，直ちに以下を得る（(iv) は，対応する $\Pi$ に移った後に $\ell$ および $\iota$ を動かして Galois 指標を構成することによって得られる）：

**定理 4.4** $R : G_F \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ をを重さ $(b_\tau)$ の代数的 Galois 指標とする．

(i) （**代数性**）代数体 $E$ と $\lambda \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(E, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ が存在し，$\ell$ を割らないすべての有限素点 $v$ に対して指標 $r_v : W_v \to E^\times$ が存在して $R_v = \lambda \circ r_v$．また $\mathrm{Im}\, R \subset E_{v(\lambda)}^\times$．

(ii) （**分類定理**）(1) $F$ を CM 体とする．ある整数 $w$ が存在し任意の $\tau$ に対し $b_\tau + b_{\tau\circ c} = w$ となる．とくに $F$ が総実ならば $2b_\tau = w\ (\forall\tau)$ だから，有限像の Galois 指標 $R'$ が存在して，$R = R' \cdot \chi_\ell^{-w/2}$ と書ける．
(2) $F_0$ を $F$ の最大 CM 部分体とすると，$F_0$ の代数的 Galois 指標 $R_0$ と $F$ の有限像 Galois 指標 $R'$ が存在して，$R = R' \cdot R_0|_F$．とくに，$b_\tau$ は $\tau_0 := \tau|_{F_0}$ にしか依存せず，整数 $w = b_{\tau_0} + b_{\tau_0\circ c}$ は一定である．

(iii) （**純性**）$\ell$ を割らない $v$ に対して，$R_v$ が不分岐ならば $R_v(\mathrm{Frob}_v)$ は Weil $q_v^w$-数である．

(iv) （**整合系の存在**）任意の素数 $\ell'$ と $\lambda' \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(E, \overline{\mathbb{Q}}_{\ell'})$ に対して $R_{\lambda'} : G_F \to \overline{\mathbb{Q}}_{\ell'}^\times$ が存在し，$\ell, \ell'$ を割らないすべての有限素点 $v$ に対して $R_{\lambda',v} = \lambda' \circ r_v$．

## 4.2 $GL_n$ の Langlands 対応

いよいよ大域体上の非可換類体論（$GL_n$ の Langlands 対応）の定式化に移る．$GL_1$ の場合と同様に，局所理論から始めよう．$K$ を剰余標数 $p$ の局所体，$L$ を標数 0 の係数体とするとき，$K$ の $L$ 上の **Weil-Deligne 表現** $r = (r, N, V)$ とは，$L$ 上の有限次元ベクトル空間 $V$ への $W_K$ の平滑表現（惰性群 $I_K$ のある開部分群 $V$ に対して $W_K/V$ を経由する表現）$r : W_K \to GL(V)$ と $N \in \mathrm{End}(V)$ の組であって任意の $\sigma \in W_K$ に対して $Nr(\sigma) = q^{v(\sigma)}r(\sigma)N$ をみたすものであった（山内氏・三枝氏の解説参照）．とくに体同型 $\iota : L \cong L'$ によって $L$ 上の Weil-Deligne 表現の圏と $L'$ 上の Weil-Deligne 表現の圏は同値になり，さらに $L = \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ かつ $\ell \neq p$ のときは，Grothendieck のモノドロミー定理によって $K$ の $L$ 上の Weil-Deligne 表現の圏は $W_K$ の $\ell$ 進表現 $R : W_K \to GL(V)$ の圏と Abel 圏（より強くテンソル圏）として同値になる．そこで表現の同値類の集合を：

$$\mathrm{WDRep}_n(K, L) := \{\ K \text{ の } L \text{ 上の } n \text{ 次元 Weil-Deligne 表現 }\}$$

と表すことにすると，体同型 $\iota : \overline{\mathbb{Q}}_\ell \cong \mathbb{C}$ によって，次の全単射ができる：

$$\{\ W_K\ の\ n\ 次元\ \ell\ 進表現\ \} \xrightarrow{\mathrm{WD}} \mathrm{WDRep}_n(K, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \xrightarrow{\iota} \mathrm{WDRep}_n(K, \mathbb{C}).$$

Weil-Deligne 表現 $(r, N, V)$ は $r$ が半単純であるとき **Frobenius 半単純**であるといい，それらの同値類の集合を

$$\mathrm{WDRep}_n(K, L)^{\text{F-ss}} := \{\ K\ の\ L\ 上の\ n\ 次元\ \text{Frobenius}\ 半単純\ \text{Weil-Deligne}\ 表現\ \}$$

と書くと，写像 $\mathrm{WDRep}_n(K, L) \ni r = (r, N, V) \longmapsto r^{\text{F-ss}} := (r^{\mathrm{ss}}, N, V) \in \mathrm{WDRep}_n(K, L)^{\text{F-ss}}$ が定まる．

また $\ell = p$ の場合，$K$ の $\ell$ 進 Galois 表現 $R : G_K \to GL_n(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ が **de Rham 表現**ならば，各 $\tau \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_\ell}(K, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ に対して Fontaine の $D_{\mathrm{pst}}$ 関手（本報告集の中村氏の解説参照）によって $\mathrm{WD}_\tau(R) \in \mathrm{WDRep}_n(K, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ および **Hodge-Tate の重さ** $\mathrm{HT}_\tau(R) \in \mathbb{Z}^n/S_n$ が定まり，$\mathrm{WD}_\tau(R)$ の同型類は $\tau$ によらずに定まるので $\mathrm{WD}(R)$ と表す．

**定理 4.5** （**$GL_n$ の局所 Langlands 対応**）次の表現の同値類の集合の間に自然な 1 対 1 対応がある：

$$\mathcal{L} : \{\ GL_n(K)\ の既約平滑表現\ \} \xrightarrow{\cong} \mathrm{WDRep}_n(K, \mathbb{C})^{\text{F-ss}}.$$

ここでは「自然な」の意味を詳しく述べることはできないが（現時点ではこの対応を特徴づけるには表現のペアの $\epsilon$ 因子などが必要である），いくつかの性質をあげると：

(i) $n = 1$ ならば，$\mathcal{L}(\pi) = \pi \circ \mathrm{Art}_K^{-1}$.

(ii) $\pi$ の中心指標を $\chi$ とすると，$\mathcal{L}(\chi) = \det \circ \mathcal{L}(\pi)$.

(iii) $\chi$ を $K^\times$ の平滑指標とすると，$\mathcal{L}(\pi \otimes (\chi \circ \det)) = \mathcal{L}(\pi) \otimes \mathcal{L}(\chi)$.

(iv) $\pi$：**不分岐球表現** $(\pi^{GL_n(\mathcal{O})} \neq 0) \iff \mathcal{L}(\pi)$：**不分岐** $(r|_{I_K} = 1,\ N = 0)$.

(v) $\mathcal{L}(\pi \boxplus \pi') = \mathcal{L}(\pi) \oplus \mathcal{L}(\pi')$.

(vi) $\pi$：二乗可積分 $\iff \mathcal{L}(\pi)$：直既約.

(vii) $\pi$：尖点的 $\iff \mathcal{L}(\pi)$：既約.

(viii) $\pi$：重さ $w$ で純（絶対緩増加）$\iff \mathcal{L}(\pi)$：重さ $w$ で純.

(ix) $\pi$ の導手が $\mathfrak{p}^m \iff \mathcal{L}(\pi)$ の導手が $\mathfrak{p}^m$.

などがある．とくに，不分岐な場合は $\pi = \chi_1 \boxplus \cdots \boxplus \chi_n$ と書けるから $r = \mathcal{L}(\pi) = \mathcal{L}(\chi_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}(\chi_n)$ であり，$\mathrm{Art}_K$ の性質 (1) によって不分岐な指標 $\chi : K^\times/\mathcal{O}^\times \to \mathbb{C}^\times$ に対して $\chi(\varpi) = \mathcal{L}(\chi)(\mathrm{Frob}_K)$ だから：

$$\{\ \pi\ の\ \text{Hecke}\ 固有値\ \} = \{\ r(\mathrm{Frob}_K)\ の固有値\ \} \in (\mathbb{C}^\times)^n/S_n$$

となり，この場合 $\pi, r$ がそれぞれ重さ $w \in \mathbb{Z}$ で純であるとは，すべての固有値が Weil $q^w$-数であることである．(ただし，この等号が成立するように Hecke 固有値（佐武パラメータ）を正規化するには注意を要する．未完成の原稿だが [BG] を参照されたい．)

さて大域理論であるが，$F$ を代数体とする．$GL_n(\mathbb{A}_F)$ の保型表現 $\Pi = \Pi^\infty \otimes \Pi_\infty$ に対して，$\Pi^\infty = \bigotimes_v \Pi_v$ は $GL_n(\mathbb{A}^\infty)$ の既約平滑表現であり，各局所成分 $\Pi_v$ は $GL_n(F_v)$ の既約平滑表現である．Hecke 指標の場合の定義の一般化として，無限素点 $v$ に対して $\Pi_v$ が**代数的**であるという概念が定義され（例えば [BG],[C],[T] を見よ），すべての $v \mid \infty$ において $\Pi_v$ が代数的であるとき $\Pi$ は**代数的**であるという．このとき，無限小指標によって各 $\tau \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(F, \mathbb{C})$ に対して $\Pi_{v(\tau)}$ の**重さ** $a_\tau \in \mathbb{Z}^n/S_n$ が定まり，$(a_\tau)$ を $\Pi$ の**重さ**という．例えば重さ $k$ の古典的モジュラー形式に対応する $GL_2(\mathbb{A})$ の尖点的保型表現の重さは $(0, k-1)$ となる．

また Galois 側では次の定義をする．代数体 $F$ の $\ell$ 進 Galois 表現 $R : G_F \to GL_n(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ と $F$ の有限素点 $v$ に対して，$v$ が $\ell$ を割らないときには $R_v := R|_{W_v}$ とし，$v \mid \ell$ のときは $R_v := R|_{G_v}$ とする．$W_v, G_v$ は $G_F$ の部分群として共役を除いて定まるから，表現の制限の同型類は一意に決まることに注意する．

**定義 4.6** 代数体 $F$ の $\ell$ 進 Galois 表現 $R : G_F \to GL_n(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ は，次の二条件をみたすとき**代数的**であるという：

(i) $\ell$ を割るすべての素点 $v$ に対して $R_v$ は de Rham である．

(ii) ほとんどすべての素点 $v$ に対して $R_v$ は不分岐である．

このとき，すべての有限素点に対して $\mathrm{WD}(R_v) \in \mathrm{WDRep}_n(F_v, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ が定まり，各 $\tau \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(F, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ に対して $b_\tau := \mathrm{HT}_\tau(R_v) \in \mathbb{Z}^n/S_n$ が定まる（この $(b_\tau)$ を $R$ の **Hodge-Tate の重さ**という）．

（代数的 Galois 表現は，[FM] においては**幾何的** (geometric) と呼ばれ，これらがすべて代数幾何学（モチーフ）から来る，すなわち $F$ 上の代数多様体の $\ell$ 進エタールコホモロジーに現れる，というのが **Fontaine-Mazur 予想**であった．実際に代数幾何学から来るものを幾何的と呼ぶほうが混乱が少ないことや，代数的保型表現との対応から，最近は「代数的」を用いることが多くなっている．）

**予想 4.7** （**$GL_n$ の大域 Langlands 対応**）素数 $\ell$ と体同型 $\iota : \overline{\mathbb{Q}}_\ell \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}$ を固定する．表現の同値類の集合

$$\left\{ \begin{array}{c} F \text{ の } n \text{ 次元代数的既約 Galois 表現} \\ R : G_F \to GL_n(\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \end{array} \right\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{c} GL_n(\mathbb{A}_F) \text{ の代数的尖点的保型表現} \\ \Pi \end{array} \right\}$$

は，すべての有限素点において $\mathcal{L}(\Pi_v) = \iota \circ \mathrm{WD}(R_v)^{\text{F-ss}}$ をみたすように互いに一対一に対応する．このとき $\Pi$ の重さ $(a_\tau)$ と $R$ の Hodge-Tate の重さ $(b_\tau)$ は $a_{\iota\circ\tau} = b_\tau$ をみたす．

与えられた $\Pi, R$ に対して，すべての有限素点における対応が示されなくても，ほとんどすべての有限素点において等号が示されれば対応は確立される．これは，$\Pi, R$ はそれぞれほとんどすべての有限素点 $v$ に対する $\Pi_v, R_v$ によって一意に定まるからである．これは $\Pi$ に対しては**強重複度 1 定理**，$R$ に対しては **Chebotarev の密度定理**（本報告集の千田氏の解説を参照）から従う．与えられた $\Pi, R$ が互いに対応することを確かめるだけならば不分岐な素点での情報のみでよいのは，類体論の相互法則と同様である．ちなみに，Chebotarev の密度定理から，ほとんどすべての素点と言わず密度 1 の素点の集合，さらには 1 より多少小さい密度の集合での $R_v$ によっても $R$ は特定できるが，$\Pi$ の側では Ramanujan 予想（後述）を仮定しないとそれに対応する事実は証明できないようである（伊藤哲史氏に教えていただいた；D. Ramakrishnan, C. S. Rajan らの研究や予想がある）．この面では，Galois 表現の方が多少見かけ上の剛性が高いようである．

$a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n/S_n$ に対し，$|a| := a_1 + \ldots + a_n$ とし，代数的な $\Pi$ の重さ $(a_\tau)$，代数的な $R$ の重さ $(b_\tau)$ に対して次のように定める（「重さの平均の 2 倍」）：

$$w((a_\tau)) := \frac{2}{n[F:\mathbb{Q}]} \sum_{\tau \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(F,\mathbb{C})} |a_\tau|, \quad w((b_\tau)) := \frac{2}{n[F:\mathbb{Q}]} \sum_{\tau \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(F,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)} |b_\tau|.$$

**予想 4.8** $\Pi$ を $GL_n(\mathbb{A}_F)$ の重さ $(a_\tau)$ の代数的尖点的保型表現とする．

(i) （**代数性**）代数体 $E$ と $\lambda \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(E, \mathbb{C})$ が存在し，すべての有限素点 $v$ に対して $\pi_v$ は $E$ 上定義される．とくに不分岐な $v$ での Hecke 固有値はすべて $\lambda(E)$ の元である．

(ii) （**Hodge 対称性**）$F_0 \subset F$ を最大 CM 部分体とすると，$a_\tau$ は $\tau_0 := \tau|_{F_0}$ にしか依存しない．$w((a_\tau))$ は整数であり，任意の $\tau$ に対し $a_{c\circ\tau} = (w, \ldots, w) - a_\tau$ となる．

(iii) （**Ramanujan 予想**）すべての有限素点に対し $\Pi_v$ は重さ $w$ で純である．とくに不分岐な $v$ での Hecke 固有値はすべて Weil $q_v^w$-数である．

これらの命題が知られている例では，いずれも何らかの形で代数幾何学とのつながりを通して示されている．(i) は重さがコホモロジカルかそれに近い場合は保型形式を志村多様体上のベクトルバンドルの切断と考えることで得られる ([C])．(ii) はおそらく多くの場合に知られていると思われるが筆者は証明を知らない．(iii) が知られているケースはすべて，モチーフと対応させて Weil 予想を用いることで得られる．

**予想 4.9** $R : G_F \to GL_n(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ を重さ $(b_\tau)$ の代数的既約 Galois 表現とする．

(i) **（代数性・Frobenius 半単純性）** 代数体 $E$ と $\lambda \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(E, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ が存在し，すべての有限素点 $v$ に対して $r_v \in \mathrm{WDRep}_n(F_v, E)^{\text{F-ss}}$ が存在して $\mathrm{WD}(R_v) = \lambda \circ r_v$．また $\mathrm{Im}\, R \subset GL_n(E_{v(\lambda)})$．

(ii) **（Hodge 対称性）** $F_0 \subset F$ を最大 CM 部分体とすると，$b_\tau$ は $\tau_0 := \tau|_{F_0}$ にしか依存しない．$w((b_\tau))$ は整数であり，任意の $\tau$ に対し $b_{\tau_0 \circ c} = (w, \ldots, w) - b_{\tau_0}$ となる．

(iii) **（純性）** すべての有限素点に対し $\mathrm{WD}(R_v)$ は重さ $w$ で純である．とくに不分岐な $v$ での $R_v(\mathrm{Frob}_v)$ の固有値はすべて Weil $q_v^w$-数である.（Hodge-Tate の重さと区別するために，$w$ を **Frobenius の重さ**という.）

(iv) **（整合系の存在）** 任意の素数 $\ell'$ と $\lambda' \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(E, \overline{\mathbb{Q}}_{\ell'})$ に対して $R_{\lambda'} : G_F \to GL_n(\overline{\mathbb{Q}}_{\ell'})$ が存在し，すべての有限素点 $v$ に対して $\mathrm{WD}(R_{\lambda',v}) = \lambda' \circ r_v$.

重さ (0)，すなわち有限像の場合を除けば，保型表現またはモチーフとの対応を経由せずにこれらの命題が証明される例はほぼ皆無だと思われる．$R$ と $\Pi$ との対応が完全に証明できる場合は，(i) の代数性，(ii),(iii) は $\Pi$ についての対応する命題から従い，(iv) は $\Pi$ から $(\lambda', \iota')$ に対する Galois 表現の構成ができれば従う．$R$ が $F$ 上のモチーフと対応する場合（ある代数多様体の $\ell$ 進エタールコホモロジーに現れるというだけでなく，$F$ 上の代数的サイクルによる射影子が与えられている場合）には，(i) の代数性は $v \mid \ell$ の場合を除けば $\ell$ 進エタールコホモロジーの $\ell$-非依存性の帰結（本報告集の三枝氏の解説を参照），Frobenius 半単純性は有限体上のスタンダード予想の帰結であり，(ii) は対応する $\mathbb{C}$ 上のモチーフの Hodge 対称性，(iii) は不分岐な $v$ では Weil 予想（Deligne の定理），一般には未解決のウェイト・モノドロミー予想の帰結であり，(iv) は (i) と同様の制限下で $\ell'$ 進エタールコホモロジーの構成の帰結である．

これらの予想は主に代数幾何学における重さの哲学を反映するものであるから，代数幾何学を通して証明されるものが多いが，保型表現の解析的理論がもっとも強力に定性的な結果をもたらすものとしては，有限性がある．代数的な $\Pi, R$ の**導手**を，すべての有限素点における $\Pi_v, \mathrm{WD}(R_v)$ の導手 $\mathfrak{p}_v^m$ の積 $\prod_v \mathfrak{p}_v^m$ で定めると，これは有限積で $\mathcal{O}_F$ のイデアルとなり，$\Pi$ と $R$ が対応すれば互いの導手は等しい．$\Pi$ の導手は Hecke 指標のモジュラス・保型形式のレベルにあたるものである．

**予想 4.10** $F$ を代数体，$n \in \mathbb{Z}_{>0}$ とし，$I$ は $\mathcal{O}_F$ のイデアルとする．

(i) **（有限性定理）** $GL_n(\mathbb{A}_F)$ の代数的尖点的保型表現 $\Pi$ で重さ $(a_\tau)$ および導手 $I$ のものは有限個しかない．

(ii) **（有限性予想）** $n$ 次元代数的 $\ell$ 進既約 Galois 表現 $R$ で重さ $(b_\tau)$ および導手 $I$ のものは有限個しかない．

(i) は $GL_n$ に対してはっきりと証明が書かれた文献を知らないが，Harish-Chandra が半単純 Lie 群上の保型形式の有限性を証明した [HC] と同様に，カシミール作用素に楕円型偏微分作用素の正則性定理を適用すれば（与えられたレベルの）保型形式の空間の有限性が出るから，そこから従う．(ii) は Langlands 対応が示されれば (i) から従うが，$GL_1$ の場合でも類体論を経由して示す以外に方法がない．重さ (0)（有限像）の場合には Hermite-Minkowski の定理（与えられた判別式をもつ代数体の数の有限性）から従う (Anderson-Blasius-Coleman-Zettler)．またより精密に，有限個の分岐する素点での分岐タイプを決めて保型表現または Galois 表現の個数を数える問題（$GL_1$ の場合には狭義イデアル類群の類数となる）もあり，分岐を増やして行った場合の漸近公式などの研究もあるが (J. Weinstein)，保型表現の側で計算するしかなさそうである．代数体の Galois 群は，一見保型表現やモチーフと比べてずっと「小さな」対象に見えるが，有限性や非存在を示すのは保型表現の世界が今のところもっとも易しいというのは興味深いことである．

# 参考文献

[BG] Buzzard, K., Gee, T., *The conjectural connections between automorphic representations and Galois representations - preliminary version*, preprint.
`http://www2.imperial.ac.uk/~buzzard/maths/research/papers/index.html`,
`http://www.math.harvard.edu/~tgee/`

[C] Clozel., L., *Motifs et formes automorphes: applications du principe de fonctorialité*, in: *Automorphic forms, Shimura varieties, and L-functions* (Ann Arbor, 1988), vol. I, Perspect. Math. vol. 10, Academic Press, 1990, 77-159.

[F] Fargues, L., *Motives and automorphic forms: the (potentially) abelian case*, preprint.
`http://www.math.u-psud.fr/~fargues/Prepublications.html`

[FM] Fontaine, J.-M., Mazur, B., *Geometric Galois Representations*, in: *Elliptic Curves, Modular Forms and Fermat's Last Theorem* (J. Coates and S.-T. Yau, eds.), International Press, 1995, 41-78.

[HC] Harish-Chandra, *Automorphic forms on a semisimple Lie group*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **45** (1959), 570–573.

[Lam] Lam, T.Y., *Representations of Finite Groups: A Hundred Years*, Notices of the AMS, Part I: **45**-3 (1998), 361–372, Part II: **45**-4 (1998), 465–474.
`http://www.ams.org/notices/199803/lam.pdf`, `http://www.ams.org/notices/199804/lam2.pdf`

[MM] Matsushima, Y., Murakami, S., *On vector bundle valued harmonic forms and automorphic forms on symmetric spaces*, Ann. of Math. (2) **78** (1963), 365–416.

[Se] Serre, J.-P., *Abelian $\ell$-adic representations and elliptic curves*, Benjamin, 1968.

[Sh] Shimura, G., *Introduction to the Arithmetic Theory of Automorphic Functions*, Iwanami / Princeton UP, 1971.

[T] R. Taylor, *Galois representations*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math., Ser. 6. **13**-1 (2004), 73–119.

[We] Weil, A., *On a Certain Type of Characters of the Idèle-Class Group of an Algebraic Number-Field*, in: *Proceedings of the International Symposium on Algebraic Number Theory* (Tokyo-Nikko 1955), The Science Council of Japan, 1956, 1-7.

[Y] Yoshida, T., *Local class field theory via Lubin-Tate theory*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math., Ser. 6. **17**-2 (2008), 411-438.

（よしだ・てるよし／ケンブリッジ大学数学科）