Galois 表現の変形理論入門

今井 直毅 (東京大学大学院数理科学研究科)

目 次

0 はじめに

Galois 表現の変形理論とは，与えられた Galois 表現をより大きな係数環に変形することを考え，その変形空間を調べることによって，もとの Galois 表現についての情報を得る理論である．Taylor，Wiles による Fermat 予想の解決 [W]，[TW] において重要な役割を果たしたのを初めとし，Galois 表現の保型性を示す上で欠かすことのできない手法となってきている．本稿の目的は，Galois 表現の変形とその変形空間に関する基本的なことを解説することである．応用上重要なのは，有限体上の Galois 表現の変形であるが，本稿では，もう少し一般的な状況で書いておいた．

第一節では，状況設定として，副有限群の表現の変形とその普遍変形環の定義を述べる．第二節では，普遍変形環の存在に関する基本的な定理を述べる．第三節では，普遍変形環の接空間と 1 次群コホモロジーの間の関係を説明し，普遍変形環が Noether 環になるための必要十分条件について述べる．第四節では，副有限群の表現を変形する上での障害が，2 次群コホモロジーに表れることを説明し，普遍変形環の次元と群コホモロジーの次元の間の関係について述べる．第五節では，条件付きの変形を考えた際の，条件付き普遍変形環の存在に関する定理を述べる．最後に付録として，必要になる環論に関する命題をまとめておいた．

普遍変形環の存在は最初 Mazur [Ma1] によって，Schlessinger 判定法 [Sch] を用いることで証明された．本稿では，枠付き変形普遍環を構成し，そこから普遍変形環を構成する方法をとった．普遍変形環の構成及び条件付き普遍変形環に関する定理は，[SL] を参考にした．普遍変形環の性質に関するその他の命題の多くは，[Ma1] を参考にしたが，[Ma1] では副有限群や係数環にいくつか制限が付いていたので，なるべく一般の場合に拡張しておいた．

普遍変形環の理論についての文献は，他にも [Ma2] などがある．また，普遍変形環が Galois 表現を調べる上でどのように使われるかについては [斎藤] が参考になると思う．

謝辞

本稿は第 17 回整数論サマースクールにおける筆者の講演に基づいている．サマースクールを企画してくださった世話人の落合理さん，千田雅隆さん，山内卓也さんに感謝したい．また落合さんは筆者の講演の準備の段階で多くの助言を下さった．ここに感謝の意を表したい．

記法

本稿では以下の記法を用いる．可換局所環 R に対して，その極大イデアルを $\mathfrak{m}_R$ で表す．可換環 R と R 加群 M に対して，$\mathrm{End}_R(M)$ は M の自己 R 加群準同型全体を表し，$\mathrm{Aut}_R(M)$ は M の自己 R 加群同型全体を表す．可換環 R と群 G に対して，$R[G]$ は R 係数の G の群環を表す．Sets は集合の圏を表す．

1　群の表現の変形

まず群の表現の変形を考えるための状況設定について説明する．Λ を Noether 位相可換局所環とし，Λ の剰余体を k とする．Λ の位相は $\mathfrak{m}_\Lambda$ 進位相とし，体 k の位相は離散位相を考える．圏 $\mathcal{C}_\Lambda$ を次のように定める．

- $\mathcal{C}_\Lambda$ の対象は，位相可換局所 Λ 代数 A で，$\Lambda \to A/\mathfrak{m}_A$ が全射となり，

  $$A \to \varprojlim_{\mathfrak{a} \subset A} A/\mathfrak{a}$$

  が位相同型になるものとする．ただし，上の射影極限において，$\mathfrak{a} \subset A$ は $A/\mathfrak{a}$ が Artin 局所環になるような開イデアル全体を動くとし，$A/\mathfrak{a}$ の位相は離散位相を考えているとする．

- $\mathcal{C}_\Lambda$ の射は，連続 Λ 代数準同型とする．

特に，$A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}_\Lambda$ の位相は完備であり，一般に $\mathfrak{m}_A$ 進位相より粗いことに注意．また，以下では上記のような $A/\mathfrak{a}$ のことを A の離散 Artin 商ということにする．

$A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}_\Lambda$ に対し，階数 n の有限生成自由 A 加群 M の位相を同型 $M \xrightarrow{\sim} A^n$ によって定める．ただし，A^n の位相は直積位相を考えており，M に定まる位相は同型 $M \xrightarrow{\sim} A^n$ の取り方によらない．

G を副有限群とし，V を n 次元 k ベクトル空間とする．連続表現 $\bar{\rho} : G \to \mathrm{Aut}_k(V)$ を考える．本稿で考える群の表現の変形は次のようなものである．

定義 1.1. $\bar{\rho}$ の $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}_\Lambda$ 上の変形とは，階数 n の有限生成自由 A 加群 M への G の連続表現 $\rho_A : G \to \mathrm{Aut}_A(M)$ と $k[G]$ 同型 $\psi_A : M \otimes_A k \xrightarrow{\sim} V$ の組 (ρ_A, ψ_A) のことである．

関手 $D_{\bar{\rho}} : \mathcal{C}_\Lambda \to \mathrm{Sets}$ を $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}_\Lambda$ に対して

$$D_{\bar{\rho}}(A) = \bigl\{\bar{\rho} \text{ の } A \text{ 上の変形の同型類全体のなす集合}\bigr\}$$

とすることで定める．以下では，組 (ρ_A, ψ_A) の同型類のことを，単に (ρ_A, ψ_A) と表すことがある．$\mathcal{C}_\Lambda$ における射 $A_1 \to A_2$ に対して，$A_1 \to A_2$ から誘導される $D_{\bar{\rho}}(A_1) \to D_{\bar{\rho}}(A_2)$ による $(\rho_{A_1}, \psi_{A_1}) \in D_{\bar{\rho}}(A_1)$ の像を $(\rho_{A_1} \otimes_{A_1} A_2, \psi_{A_1} \otimes_{A_1} A_2)$ と書く．$D_{\bar{\rho}}$ が $R_{\bar{\rho}} \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}_\Lambda$ で表現されるとき，$R_{\bar{\rho}}$ を $\bar{\rho}$ の普遍変形環という．$\bar{\rho}$ の普遍変形環 $R_{\bar{\rho}}$ は存在するならば，同型を除いて一意に定まる．

$\bar{\rho}$ の変形は，V の順序付き基底をとることで，行列群を用いて以下のように記述できる．V の k 上の順序付き基底を一つとって固定し，それから定まる同型 $\mathrm{Aut}_k(V) \cong \mathrm{GL}_n(k)$ を考え，合成

$$G \xrightarrow{\bar{\rho}} \mathrm{Aut}_k(V) \cong \mathrm{GL}_n(k)$$

を再び $\bar{\rho}$ と表す．$A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}_\Lambda$ とする．$p_A : A \to k$ を自然な射影とし，

$$\mathrm{Hom}_{\bar{\rho}}\bigl(G, \mathrm{GL}_n(A)\bigr) = \bigl\{\rho : G \to \mathrm{GL}_n(A) \bigm| \rho \text{ は連続群準同型で } \mathrm{GL}_n(p_A) \circ \rho = \bar{\rho}\bigr\}$$

とおく．$\rho \in \mathrm{Hom}_{\bar{\rho}}\bigl(G, \mathrm{GL}_n(A)\bigr)$ に対して，

$$G \xrightarrow{\rho} \mathrm{GL}_n(A) \cong \mathrm{Aut}_A(A^n)$$

と自然な同型 $A^n \otimes_A k \cong k^n$ の組の同型類を対応させることで，全射

$$\mathrm{Hom}_{\bar{\rho}}\bigl(G, \mathrm{GL}_n(A)\bigr) \to D_{\bar{\rho}}(A) \tag{1.1}$$

が得られる．$\rho, \rho' \in \mathrm{Hom}_{\bar{\rho}}\bigl(G, \mathrm{GL}_n(A)\bigr)$ に対して，ρ, ρ' の写像 (1.1) による像が等しくなることと，$\rho = H\rho' H^{-1}$ となる $H \in \mathrm{Ker}\,\mathrm{GL}_n(p_A)$ が存在することは同値である．$\bar{\rho}$ の A 上の変形 (ρ_A, ψ_A) に対し，写像 (1.1) による $\rho \in \mathrm{Hom}_{\bar{\rho}}\bigl(G, \mathrm{GL}_n(A)\bigr)$ の像が (ρ_A, ψ_A) の同型類になるとき，ρ を変形 (ρ_A, ψ_A) の実現ということにする．

次に，群の表現の枠付き変形について述べる．V の k 上の順序付き基底 β を固定する．

定義 1.2. $\bar{\rho}$ の $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}_\Lambda$ 上の枠付き変形とは，階数 n の有限生成自由 A 加群 M への G の連続表現 $\rho_A : G \to \mathrm{Aut}_A(M)$ と $k[G]$ 同型 $\psi_A : M \otimes_A k \xrightarrow{\sim} V$ と ψ_A によって β の持ち上げとなる M の A 上の順序付き基底 β_A の組 $(\rho_A, \psi_A, \beta_A)$ のことである．

関手 $D^{\square}_{\bar{\rho}} : \mathcal{C}_\Lambda \to \mathrm{Sets}$ を $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}_\Lambda$ に対して

$$D^{\square}_{\bar{\rho}}(A) = \bigl\{\bar{\rho} \text{ の } A \text{ 上の枠付き変形の同型類全体のなす集合}\bigr\}$$

とすることで定める．$D^{\square}_{\bar{\rho}}$ が $R^{\square}_{\bar{\rho}} \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}_\Lambda$ で表現されるとき，$R^{\square}_{\bar{\rho}}$ を $\bar{\rho}$ の枠付き普遍変形環という．$\bar{\rho}$ の枠付き普遍変形環 $R^{\square}_{\bar{\rho}}$ は存在するならば，同型を除いて一意に定まる．

$\bar{\rho}$ の枠付き変形は，行列群を用いて以下のように記述できる．V の k 上の順序付き基底 β から定まる同型 $\mathrm{Aut}_k(V) \cong \mathrm{GL}_n(k)$ を考え，合成

$$G \xrightarrow{\bar{\rho}} \mathrm{Aut}_k(V) \cong \mathrm{GL}_n(k)$$

を再び $\bar{\rho}$ と表す．$A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}_\Lambda$ とする．このとき $\rho \in \mathrm{Hom}_{\bar{\rho}}\bigl(G, \mathrm{GL}_n(A)\bigr)$ に対して，

$$G \xrightarrow{\rho} \mathrm{GL}_n(A) \cong \mathrm{Aut}_A(A^n)$$

と自然な同型 $A^n \otimes_A k \cong k^n$ と A^n の A 上の自然な順序付き基底の組の同型類を対応させることで，全単射

$$\mathrm{Hom}_{\bar{\rho}}\bigl(G, \mathrm{GL}_n(A)\bigr) \to D^{\square}_{\bar{\rho}}(A) \tag{1.2}$$

が得られる．

2　普遍変形環の存在

普遍変形環の存在に関しては次が成り立つ．

定理 2.1. $\bar{\rho} : G \to \mathrm{Aut}_k(V)$ によって V を $k[G]$ 加群とみなす．このとき $\mathrm{End}_{k[G]}\, V = k$ ならば $\bar{\rho}$ の普遍変形環 $R_{\bar{\rho}}$ は存在する．

定理 2.1 を証明することが，この節の目標である．まず次を証明する．

定理 2.2. $\bar{\rho}$ の普遍枠付き変形環 $R^{\square}_{\bar{\rho}}$ は存在する．

証明．写像 (1.2) は全単射だったので，主張を示すには，$\bar{\rho}$ の枠付き普遍局所環 $R^{\square}_{\bar{\rho}} \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}_\Lambda$ と普遍表現 $\rho^{\square}_{\mathrm{univ}} \in \mathrm{Hom}_{\bar{\rho}}\bigl(G, \mathrm{GL}_n(R^{\square}_{\bar{\rho}})\bigr)$ を構成し，$A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}_\Lambda$ に対し

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_\Lambda}(R^{\square}_{\bar{\rho}}, A) \to \mathrm{Hom}_{\bar{\rho}}\bigl(G, \mathrm{GL}_n(A)\bigr);\ f \mapsto f_*(\rho^{\square}_{\mathrm{univ}}) \tag{2.1}$$

が全単射になることを示せばよい．ただし $f_*(\rho^{\square}_{\mathrm{univ}})$ は

$$G \xrightarrow{\rho^{\square}_{\mathrm{univ}}} \mathrm{GL}_n(R^{\square}_{\bar{\rho}}) \xrightarrow{\mathrm{GL}_n(f)} \mathrm{GL}_n(A)$$

を表すとする．

まず G が有限群の場合を考える．$\Lambda[G,n]$ を次の生成元と関係式で定まる可換 Λ 代数とする．

生成元	X_{ij}^g	$g \in G,\ 1 \leq i,j \leq n.$
関係式	$X_{ij}^e = \begin{cases} 1 & \\ 0 & \end{cases}$	$i=j$ $i \neq j$
	$X_{ij}^{gh} = \sum_{l=1}^{n} X_{il}^g X_{lj}^h$	$g,h \in G,\ 1 \leq i,j \leq n.$

ここで e は G の単位元を表す．

すると任意の可換 Λ 代数 A に対して，自然な全単射

$$\mathrm{Hom}_{\Lambda-\mathrm{Alg}}(\Lambda[G,n],A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}\big(G,\mathrm{GL}_n(A)\big);\ f \mapsto \rho_f \tag{2.2}$$

が存在する．ただし ρ_f は，$g \in G$ に対して $\rho_f(g) = \big(f(X_{ij}^g)\big)_{i,j}$ とすることで定める．

全単射 (2.2) によって $\bar{\rho} : G \to \mathrm{GL}_n(k)$ に対応する Λ 代数の射 $\Lambda[G,n] \to k$ の核を $\mathfrak{m}_{\bar{\rho}}$ とおくと，$\mathfrak{m}_{\bar{\rho}}$ は $\Lambda[G,n]$ の極大イデアルになる．$\Lambda[G,n]$ の $\mathfrak{m}_{\bar{\rho}}$ における完備化を $R_{\bar{\rho}}^{\square}$ とする．$R_{\bar{\rho}}^{\square}$ は Noether 完備局所環となり，$\mathcal{C}_\Lambda$ の対象となる．全単射 (2.2) により，自然な射 $\Lambda[G,n] \to R_{\bar{\rho}}^{\square}$ に対応する準同型 $\rho_{\mathrm{univ}}^{\square} : G \to \mathrm{GL}_n(R_{\bar{\rho}}^{\square})$ をとると，$\rho_{\mathrm{univ}}^{\square} \in \mathrm{Hom}_{\bar{\rho}}\big(G,\mathrm{GL}_n(R_{\bar{\rho}}^{\square})\big)$ となる．このとき写像 (2.1) が全単射になることを示す．

写像 (2.1) の逆写像を構成する．$A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}_\Lambda$ とし，$\rho \in \mathrm{Hom}_{\bar{\rho}}\big(G,\mathrm{GL}_n(A)\big)$ に対して，写像 (2.2) によって ρ と対応する $f_\rho \in \mathrm{Hom}_{\Lambda-\mathrm{Alg}}(\Lambda[G,n],A)$ をとる．ρ の $\mathfrak{m}_A$ を法とした還元が $\bar{\rho}$ であることから，$f_\rho(\mathfrak{m}_{\bar{\rho}}) \subset \mathfrak{m}_A$ となる．すると $A/\mathfrak{a}$ が Artin 局所環となるような A の開イデアル $\mathfrak{a}$ に対して，図式

$$\begin{tikzcd} \Lambda[G,n] \arrow[r, "f_\rho"] \arrow[d] & A \arrow[d] \\ R_{\bar{\rho}}^{\square} \arrow[r, "f_{\rho,\mathfrak{a}}"] & A/\mathfrak{a} \end{tikzcd}$$

を可換にするような連続 Λ 代数準同型 $f_{\rho,\mathfrak{a}} : R_{\bar{\rho}}^{\square} \to A/\mathfrak{a}$ が一意的に存在する．ただし，上の図式で縦の射はいずれも自然な射を考えている．$\mathfrak{a}$ に関する射影極限をとることによって，$f_{\rho,\mathfrak{a}}$ たちから誘導される連続 Λ 代数準同型を $\hat{f}_\rho : R_{\bar{\rho}}^{\square} \to A$ とし，写像

$$\mathrm{Hom}_{\bar{\rho}}\big(G,\mathrm{GL}_n(A)\big) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_\Lambda}(R_{\bar{\rho}}^{\square},A);\ \rho \mapsto \hat{f}_\rho$$

を考える．この写像が，写像 (2.1) の逆写像を与えていることは容易に確かめられる．

次に一般の場合を考える．まず $G = \varprojlim H$ とかく．ただし，H は図式

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\bar{\rho}"] \arrow[d] & \mathrm{GL}_n(k) \\ H \arrow[ur, "\bar{\rho}_H"'] & \end{tikzcd}$$

を可換にする $\bar{\rho}_H : H \to \mathrm{GL}_n(k)$ が存在するような G の離散商 H を動くとする．このとき H は有限群なので，すでに示したことから，$\bar{\rho}_H$ の枠付き普遍局所環 $R^{\square}_{\bar{\rho}_H} \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}_\Lambda$ と普遍表現 $\rho_{H,\mathrm{univ}} \in \mathrm{Hom}_{\bar{\rho}}\bigl(H, \mathrm{GL}_n(R^{\square}_{\bar{\rho}_H})\bigr)$ が存在する．G の 2 つの離散商 $G \to H' \to H$ に対して，

$$H' \to H \xrightarrow{\rho_{H,\mathrm{univ}}} \mathrm{GL}_n(R^{\square}_{\bar{\rho}_H})$$

に対応する $\mathcal{C}_\Lambda$ における射 $R^{\square}_{\bar{\rho}_{H'}} \to R^{\square}_{\bar{\rho}_H}$ を考えることによって，$\mathcal{C}_\Lambda$ における射影系 $(R_H)_H$ を得る．$R^{\square}_{\bar{\rho}} = \varprojlim_H R^{\square}_{\bar{\rho}_H}$ とおき，連続準同型

$$G \to H \xrightarrow{\rho_{H,\mathrm{univ}}} \mathrm{GL}_n(R^{\square}_{\bar{\rho}_H})$$

たちから，H に関する射影極限をとることで得られる連続準同型を $\rho^{\square}_{\mathrm{univ}} : G \to \mathrm{GL}_n(R^{\square}_{\bar{\rho}})$ とする．

$R^{\square}_{\bar{\rho}_H}$ の離散 Artin 商 $\bar{R}^{\square}_{\bar{\rho}_H}$ に対して，合成写像 $\Lambda[H, n] \to R^{\square}_{\bar{\rho}_H} \to \bar{R}^{\square}_{\bar{\rho}_H}$ は全射となる．G の 2 つの離散商 $G \to H' \to H$ に対して，自然な射による図式

$$\begin{tikzcd}
\Lambda[H', n] \arrow[r] \arrow[d] & R^{\square}_{\bar{\rho}_{H'}} \arrow[d] \\
\Lambda[H, n] \arrow[r] & R^{\square}_{\bar{\rho}_H}
\end{tikzcd}$$

は可換になるので，$\Lambda[H, n]$ の $R^{\square}_{\bar{\rho}_H}$ における像は，$R^{\square}_{\bar{\rho}}$ の $R^{\square}_{\bar{\rho}_H}$ における像に含まれる．よって $\bar{R}^{\square}_{\bar{\rho}_H}$ は $R^{\square}_{\bar{\rho}}$ の離散 Artin 商となる．逆に $R^{\square}_{\bar{\rho}}$ の任意の離散 Artin 商はある $R^{\square}_{\bar{\rho}_H}$ の離散 Artin 商として得られる．このことから，$R^{\square}_{\bar{\rho}} \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}_\Lambda$ となることがわかる．

A を $\mathcal{C}_\Lambda$ の対象とし，離散 Artin 商の射影極限として $A = \varprojlim_i A_i$ とかく．このとき，自然な同型

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_\Lambda}(R^{\square}_{\bar{\rho}}, A) &\cong \varprojlim_i \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_\Lambda}(R^{\square}_{\bar{\rho}}, A_i) \cong \varprojlim_i \varinjlim_H \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_\Lambda}(R^{\square}_{\bar{\rho}_H}, A_i) \\
&\cong \varprojlim_i \varinjlim_H \mathrm{Hom}_{\bar{\rho}_H}\bigl(H, \mathrm{GL}_n(A_i)\bigr) \\
&\cong \varprojlim_i \mathrm{Hom}_{\bar{\rho}}\bigl(G, \mathrm{GL}_n(A_i)\bigr) \cong \mathrm{Hom}_{\bar{\rho}}\bigl(G, \mathrm{GL}_n(A)\bigr)
\end{aligned}$$

が得られ，(2.1) が全単射であることが示された． $\square$

以下では，定理 2.1 の証明が完了するまで，$\mathrm{End}_{k[G]} V = k$ を仮定する．定理 2.1 を証明するために，まず，良い位置の表現という言葉を定義する．

V の k 上の順序付き基底を一つとって固定し，それから定まる同型 $\mathrm{Aut}_k(V) \cong \mathrm{GL}_n(k)$ を考え，合成

$$G \xrightarrow{\bar{\rho}} \mathrm{Aut}_k(V) \cong \mathrm{GL}_n(k)$$

を再び $\bar{\rho}$ と表す．G の有限個の元 $g_1, \ldots, g_r$ を，すべての $\bar{\rho}(g_i)$ と交換する $\mathrm{M}_n(k)$ の元がスカラー行列だけであるようにとる．各 $\bar{\rho}(g_i)$ の持ち上げ $E_i \in \mathrm{M}_n(\Lambda)$ をとって

固定する．$A \in \mathcal{C}_\Lambda$ とする．自然な射 $\mathrm{M}_n(\Lambda) \to \mathrm{M}_n(A)$ による E_i の像を再び E_i と書く．A をスカラー行列と見ることで $\mathrm{M}_n(A)$ の部分加群とみなし $\mathrm{M}_n^0(A) = \mathrm{M}_n(A)/A$ とおく．A 加群準同型

$$i_A : \mathrm{M}_n^0(A) \to \mathrm{M}_n(A)^r;\ M \bmod A \mapsto (ME_i - E_iM)_{i=1}^r$$

は分裂単射となることが，中山の補題よりわかる．$\pi_\Lambda \circ i_\Lambda = \mathrm{id}_{\mathrm{M}_n^0(A)}$ となる Λ 加群準同型 $\pi_\Lambda : \mathrm{M}_n(\Lambda)^r \to \mathrm{M}_n^0(\Lambda)$ を一つとって固定する．$\pi_A : \mathrm{M}_n(A)^r \to \mathrm{M}_n^0(A)$ を合成写像

$$\mathrm{M}_n(A)^r \cong \mathrm{M}_n(\Lambda)^r \otimes_\Lambda A \xrightarrow{\pi_\Lambda \otimes \mathrm{id}_A} \mathrm{M}_n^0(\lambda) \otimes_\Lambda A \cong \mathrm{M}_n^0(A)$$

によって定める．ただし，ここで一つ目と三つ目の射は自然な同型とする．

$A \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}_\Lambda$ に対して，合成写像

$$\begin{array}{cccc} \mathrm{Hom}_{\bar{\rho}}\big(G, \mathrm{GL}_n(A)\big) \to & \mathrm{M}_n(A)^r & \xrightarrow{\pi_A} & \mathrm{M}_n^0(A) \\ \rho \quad\quad \mapsto & \big(\rho(g_i)\big)_{i=1}^r & & \end{array} \tag{2.3}$$

を考え，この合成写像による $\rho \in \mathrm{Hom}_{\bar{\rho}}\big(G, \mathrm{GL}_n(A)\big)$ の像が $\pi_A(E_1, \ldots, E_r)$ となるとき，ρ は良い位置の表現ということにする．良い位置の表現のなす $\mathrm{Hom}_{\bar{\rho}}\big(G, \mathrm{GL}_n(A)\big)$ の部分集合を $\mathrm{Hom}_{\bar{\rho},\mathrm{well}}\big(G, \mathrm{GL}_n(A)\big)$ と表す．

補題 2.3. $A \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}_\Lambda$ とする．任意の $\rho_A \in \mathrm{Hom}_{\bar{\rho}}\big(G, \mathrm{GL}_n(A)\big)$ に対して，$\mathfrak{m}_A$ を法とした還元が $\mathrm{GL}_n(k)$ の単位行列になる $H \in \mathrm{GL}_n(A)$ で，$H\rho_A H^{-1}$ が良い位置の表現となるものがある．また，このような $H \in \mathrm{GL}_n(A)$ は $1 + \mathfrak{m}_A$ を法として一意に定まる．

証明．まず，ある正の整数 m に対して $\mathfrak{m}_A^m = 0$ となっている場合に，m に関する帰納法で主張を示す．

$m = 1$ の場合は明らか．$m \geq 2$ とする．$\mathfrak{m}_A^{m-1}\mathrm{M}_n^0(A)$ の元は，ある $L \in \mathfrak{m}_A^{m-1}\mathrm{M}_n(A)$ に対して $L \bmod \mathfrak{m}_A^{m-1}$ と書ける．$L \bmod \mathfrak{m}_A^{m-1} \in \mathfrak{m}_A^{m-1}\mathrm{M}_n^0(A)$ の $\mathrm{Hom}_{\bar{\rho}}\big(G, \mathrm{GL}_n(A)\big)$ への作用を

$$\mathrm{Hom}_{\bar{\rho}}\big(G, \mathrm{GL}_n(A)\big) \to \mathrm{Hom}_{\bar{\rho}}\big(G, \mathrm{GL}_n(A)\big);\ \rho_A \mapsto (1+L)\rho_A(1+L)^{-1}$$

とするとこれは代表元 L の取り方によらず定まる．

帰納法の仮定より ρ_A の $\mathfrak{m}_A^{m-1}$ を法とした還元は，良い位置の表現であるとしてよい．このときに，$(1+L)\rho_A(1+L)^{-1}$ が良い位置の表現になるような $L \bmod \mathfrak{m}_A^{m-1} \in \mathfrak{m}_A^{m-1}\mathrm{M}_n^0(A)$ が一意的に存在することを示せばよい．$L \bmod \mathfrak{m}_A^{m-1} \in \mathfrak{m}_A^{m-1}\mathrm{M}_n^0(A)$ の $\mathrm{M}_n^0(A)$ への作用を

$$\mathrm{M}_n^0(A) \to \mathrm{M}_n^0(A);\ M \bmod A \mapsto M + L \bmod A$$

とすると，写像 (2.3) は $\mathfrak{m}_A^{m-1}\mathrm{M}_n^0(A)$ の作用と両立するので，示すべきことが従う．

次に，一般の場合を考える．任意の正の整数 m に対して，$A_m = A/\mathfrak{m}_A^m$ と置き，ρ_A の $\mathfrak{m}_A^m$ を法とした還元を $\rho_{A_m} : G \to \mathrm{GL}_n(A_m)$ とする．すでに示したことから，

$\mathfrak{m}_{A_m}$ を法とした還元が $\mathrm{GL}_n(k)$ の単位行列になる $H_m \in \mathrm{GL}_n(A_m)$ で，$H_m\rho_A H_m^{-1}$ が良い位置の表現となるものがある．さらに，H_m が $1+\mathfrak{m}_{A_m}$ を法として一意に定まることを用いて，任意の正の整数 $m_1 > m_2$ に対して H_{m_1} の $\mathfrak{m}_A^{m_2}$ を法とした還元が H_{m_2} になるように，H_m たちをとることができる．A の位相は $\mathfrak{m}_A$ 進位相より粗いので，H_m たちの $\mathrm{GL}_n(A)$ への持ち上げ H が一意的に存在し，求めている条件を満たしている．さらに，求めている条件を満たす $H \in \mathrm{GL}_n(A)$ が $1+\mathfrak{m}_A$ を法として一意に定まることも容易に従う． □

包含写像 $\mathrm{Hom}_{\bar{\rho},\mathrm{well}}\big(G,\mathrm{GL}_n(A)\big) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\bar{\rho}}\big(G,\mathrm{GL}_n(A)\big)$ と写像 (1.1) の合成

$$\mathrm{Hom}_{\bar{\rho},\mathrm{well}}\big(G,\mathrm{GL}_n(A)\big) \to D_{\bar{\rho}}(A) \tag{2.4}$$

は，補題 2.3 より全単射になる．

定理 2.1 の証明. $\bar{\rho}$ の普遍表現 $\rho^{\square}_{\mathrm{univ}}$ に対して，補題 2.3 を適用して得られる $H \in \mathrm{GL}_n(R^{\square}_{\mathrm{univ}})$ を考え，$\rho^{\square}_{\mathrm{well}} = H\rho^{\square}_{\mathrm{univ}}H^{-1}$ とおく．全ての $g \in G$ に対して $\rho^{\square}_{\mathrm{well}}(g)$ の全ての成分を含むような $R^{\square}_{\mathrm{univ}}$ の最小の閉部分 Λ 代数を $R_{\bar{\rho}}$ とする．$R_{\bar{\rho}}$ は $\mathcal{C}_\Lambda$ の対象となる．$\rho^{\square}_{\mathrm{well}}$ から誘導される $\mathrm{Hom}_{\bar{\rho},\mathrm{well}}\big(G,\mathrm{GL}_n(R_{\bar{\rho}})\big)$ の元を ρ_{univ} と表す．写像 (2.4) が全単射なので，任意の $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}_\Lambda$ に対して，

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_\Lambda}(R_{\bar{\rho}},A) \to \mathrm{Hom}_{\bar{\rho},\mathrm{well}}\big(G,\mathrm{GL}_n(A)\big);\ f \mapsto f_*(\rho_{\mathrm{univ}}) \tag{2.5}$$

が全単射になることを示せばよい．ただし $f_*(\rho_{\mathrm{univ}})$ は

$$G \xrightarrow{\rho_{\mathrm{univ}}} \mathrm{GL}_n(R_{\bar{\rho}}) \xrightarrow{\mathrm{GL}_n(f)} \mathrm{GL}_n(A)$$

を表すとする．

写像 (2.5) が単射であることは，$R_{\bar{\rho}}$ の定義から明らかである．写像 (2.5) が全射になることを示す．$\rho_A \in \mathrm{Hom}_{\bar{\rho},\mathrm{well}}\big(G,\mathrm{GL}_n(A)\big)$ とする．全単射 (2.1) により ρ_A に対応する $\tilde{f} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_\Lambda}(R^{\square}_{\bar{\rho}},A)$ をとり，$\tilde{f}$ の $R_{\bar{\rho}}$ への制限を f とする．すると

$$f_*(\rho_{\mathrm{univ}}) = \tilde{f}_*(\rho^{\square}_{\mathrm{well}}) = \tilde{f}_*(H\rho^{\square}_{\mathrm{univ}}H^{-1}) = \mathrm{GL}_n(\tilde{f})(H)\rho_A\big(\mathrm{GL}_n(\tilde{f})(H)\big)^{-1}$$

となるが，$f_*(\rho_{\mathrm{univ}})$ と ρ_A はどちらも良い位置の表現なので，補題 2.3 の一意性に関する主張から $f_*(\rho_{\mathrm{univ}}) = \rho_A$ がわかる． □

$n=1$ のときは，$\mathrm{End}_{k[G]}V = k$ となるので，普遍変形環が存在する．1 次元表現の普遍変形環に関しては，次が成り立つ．

命題 2.4. $n=1$ とし，k の標数が p であるとする．Λ の $\mathfrak{m}_\Lambda$ 進位相に関する完備化を $\widehat{\Lambda}$ とし，$G^{\mathrm{ab},p}$ を G の Abel 化の副 p 完備化とする．このとき，$\bar{\rho}$ の普遍変形環 $R_{\bar{\rho}}$ は $\widehat{\Lambda}$ 係数の $G^{\mathrm{ab},p}$ の完備群環 $\widehat{\Lambda}[[G^{\mathrm{ab},p}]]$ と同型になる．

証明．$\bar{\rho}$ と自然な同型 $\mathrm{Aut}_k(V) \cong k^\times$ の合成

$$G \xrightarrow{\bar{\rho}} \mathrm{Aut}_k(V) \cong k^\times$$

を再び $\bar{\rho}$ で表す．$\bar{\rho}(G) \subset k_0^\times$ となるような，有限体 $k_0 \subset k$ をとる．p に関する k_0 上の Witt ベクトルの環を $W(k_0)$ とかく．$\widehat{\Lambda}$ は自然に $W(k_0)$ 代数となる．Teichmüller 持ち上げ写像 $k_0^\times \to W(k_0)^\times$ と自然な射 $W(k_0)^\times \to \widehat{\Lambda}^\times$ の合成を

$$s_{\widehat{\Lambda}} : k_0^\times \to \widehat{\Lambda}^\times$$

とする．任意の $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}_\Lambda$ に対し，$\mathrm{GL}_1(A)$ と $A^\times$ を同一視する．$\pi : G \to G^{\mathrm{ab},p}$ を自然な全射とし，群準同型

$$\rho_{\mathrm{univ}} : G \to \mathrm{GL}_1(\widehat{\Lambda}[[G^{\mathrm{ab},p}]]);\ g \mapsto s_{\widehat{\Lambda}}\bigl(\bar{\rho}(g)\bigr)\pi(g)$$

を考える．Artin 環である $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}_\Lambda$ に対して，

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_\Lambda}(\widehat{\Lambda}[[G^{\mathrm{ab},p}]], A) \to \mathrm{Hom}_{\bar{\rho}}\bigl(G, \mathrm{GL}_1(A)\bigr);\ f \mapsto f_*(\rho_{\mathrm{univ}}) \tag{2.6}$$

が全単射になることを示せばよい．ただし $f_*(\rho_{\mathrm{univ}})$ は

$$G \xrightarrow{\rho_{\mathrm{univ}}} \mathrm{GL}_1(\widehat{\Lambda}[[G^{\mathrm{ab},p}]]) \xrightarrow{\mathrm{GL}_1(f)} \mathrm{GL}_1(A)$$

を表すとする．

写像 (2.6) の逆写像を構成する．A を Artin 環である $\mathcal{C}_\Lambda$ の対象とする．A は自然に $\widehat{\Lambda}$ 代数となる．$s_{\widehat{\Lambda}} : k^\times \to \widehat{\Lambda}^\times$ と自然な射 $\widehat{\Lambda}^\times \to A^\times$ の合成を $s_A : k^\times \to A^\times$ で表す．$\rho \in \mathrm{Hom}_{\bar{\rho}}\bigl(G, \mathrm{GL}_1(A)\bigr)$ に対し，群準同型

$$h_\rho : G \to A^\times;\ g \mapsto \rho(g)s_A\bigl(\bar{\rho}(g)\bigr)^{-1}$$

を考えると，図式

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "h_\rho"] \arrow[d, "\pi"'] & A^\times \\ G^{\mathrm{ab},p} \arrow[ur, "\bar{h}_\rho"'] & \end{tikzcd}$$

を可換にする $\bar{h}_\rho : G^{\mathrm{ab},p} \to A^\times$ が一意的に存在する．$\widehat{\Lambda}[G^{\mathrm{ab},p}]$ を $\widehat{\Lambda}$ 係数の $G^{\mathrm{ab},p}$ の群環とし，$\widehat{\Lambda}$ 代数準同型 $f_\rho : \widehat{\Lambda}[G^{\mathrm{ab},p}] \to A$ を，$g \in G^{\mathrm{ab},p} \subset \widehat{\Lambda}[G^{\mathrm{ab},p}]$ に対して $g \mapsto \bar{h}_\rho(g)$ とすることで定める．すると f_ρ は連続 $\widehat{\Lambda}$ 準同型 $\hat{f}_\rho : \widehat{\Lambda}[[G^{\mathrm{ab},p}]] \to A$ に一意的に延びる．写像

$$\mathrm{Hom}_{\bar{\rho}}\bigl(G, \mathrm{GL}_1(A)\bigr) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_\Lambda}(\widehat{\Lambda}[[G^{\mathrm{ab},p}]], A);\ \rho \mapsto \hat{f}_\rho$$

が写像 (2.6) の逆写像を与えることは容易に確かめられる．□

3 普遍変形環の接空間

$k[\epsilon]$ を生成元 ϵ と関係式 $\epsilon^2=0$ で定まる k 代数とする．$k[\epsilon]$ の元は k の元 x,y を用いて $x+y\epsilon$ と表せる．$k[\epsilon]$ は自然に $\mathcal{C}_\Lambda$ の対象とみなせる．$R\in\mathcal{C}_\Lambda$ に対して，R の Zariski 接空間 t_R を $t_R=\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_\Lambda}(R,k[\epsilon])$ と定義する．

t_R に k ベクトル空間の構造を以下のように定める．k 代数 $k[\epsilon]\times_k k[\epsilon]$ を

$$k[\epsilon]\times_k k[\epsilon]=\big\{(x+y_1\epsilon,x+y_2\epsilon)\in k[\epsilon]\times k[\epsilon]\;\big|\;x,y_1,y_2\in k\big\}$$

と定義する．すると自然な同型

$$h:\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_\Lambda}(R,k[\epsilon]\times_k k[\epsilon])\cong\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_\Lambda}(R,k[\epsilon])\times\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_\Lambda}(R,k[\epsilon])=t_R\times t_R$$

が存在する．k 代数準同型

$$f_s:k[\epsilon]\times_k k[\epsilon]\to k[\epsilon];\ (x+y_1\epsilon,x+y_2\epsilon)\mapsto x+(y_1+y_2)\epsilon$$

を考え，t_R における加法を

$$t_R\times t_R\xrightarrow{h^{-1}}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_\Lambda}(R,k[\epsilon]\times_k k[\epsilon])\xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_\Lambda}(R,f_s)}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_\Lambda}(R,k[\epsilon])=t_R$$

によって定める．次に $a\in k$ に対して，k 代数準同型

$$m_a:k[\epsilon]\to k[\epsilon];\ x+y\epsilon\to x+ay\epsilon$$

を考え，t_R における a 倍を

$$t_R=\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_\Lambda}(R,k[\epsilon])\xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_\Lambda}(R,m_a)}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_\Lambda}(R,k[\epsilon])=t_R$$

と定める．

$\mathrm{Ad}(\bar\rho)$ は $\mathrm{End}_k(V)$ に $g\in G$ の作用を

$$\mathrm{End}_k(V)\to\mathrm{End}_k(V);\ \phi\to\bar\rho(g)\phi\bar\rho(g)^{-1}$$

と定めた連続 G 加群を表すとする．本稿では，連続 G 加群 $\mathrm{Ad}(\bar\rho)$ の群コホモロジーは，連続群コホモロジーを考えるとする．このとき次が成り立つ．

命題 3.1. $\mathrm{End}_{k[G]}V=k$ とし，$R_{\bar\rho}$ を $\bar\rho$ の普遍変形環とする．このとき k ベクトル空間の自然な同型

$$t_{R_{\bar\rho}}\cong H^1\big(G,\mathrm{Ad}(\bar\rho)\big)$$

が存在する．

証明．V の k 上の順序付き基底を一つとって固定して，$\mathrm{End}_k(V)$ と $\mathrm{M}_n(k)$ を同一視し，$\bar\rho$ を $G\to\mathrm{GL}_n(k)$ とみなす．このとき，自然な全射

$$\mathrm{Hom}_{\bar\rho}\big(G,\mathrm{GL}_n(k[\epsilon])\big)\to D_{\bar\rho}(k[\epsilon])\cong t_{R_{\bar\rho}}\tag{3.1}$$

が存在する．$Z^1\big(G, \mathrm{Ad}(\bar{\rho})\big)$ を連続 G 加群 $\mathrm{Ad}(\bar{\rho})$ の連続 1 コサイクルのなす空間とする．$Z^1\big(G, \mathrm{Ad}(\bar{\rho})\big)$ の元を $c : G \to \mathrm{M}_n(k)$ と表す．このとき

$$Z^1\big(G, \mathrm{Ad}(\bar{\rho})\big) \to \mathrm{Hom}_{\bar{\rho}}\big(G, \mathrm{GL}_n(k[\epsilon])\big);\ c \mapsto \Big(g \mapsto \big(1 + c(g)\epsilon\big)\bar{\rho}(g)\Big) \tag{3.2}$$

は全単射となる．写像 (3.2) と写像 (3.1) の合成

$$Z^1\big(G, \mathrm{Ad}(\bar{\rho})\big) \to t_{R_{\bar{\rho}}} \tag{3.3}$$

は k ベクトル空間の全射となる．準同型 (3.3) の核は，ちょうど連続 1 コバウンダリーの空間になるので，主張が従う． □

補題 3.2. $R \in \mathcal{C}_\Lambda$ に対して，k ベクトル空間の自然な同型

$$\mathrm{Hom}_{k\text{-cont}}\big(\mathfrak{m}_R/(\mathfrak{m}_R^2 + \mathfrak{m}_\Lambda R), k\big) \cong t_R$$

が存在する．ただし上の同型の左辺は，$\mathfrak{m}_R/(\mathfrak{m}_R^2 + \mathfrak{m}_\Lambda R)$ から k への k 線型連続写像全体を表し，$\mathfrak{m}_R/(\mathfrak{m}_R^2 + \mathfrak{m}_\Lambda R)$ の位相は R の位相から誘導されるものを考えるとする．

証明. $\mathfrak{m}_{k[\epsilon]}^2 = 0$ なので，自然な射

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_\Lambda}\big(R/(\mathfrak{m}_R^2 + \mathfrak{m}_\Lambda R), k[\epsilon]\big) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_\Lambda}(R, k[\epsilon]) = t_R$$

は同型となる．自然な射

$$k \oplus \mathfrak{m}_R/(\mathfrak{m}_R^2 + \mathfrak{m}_\Lambda R) \to R/(\mathfrak{m}_R^2 + \mathfrak{m}_\Lambda R)$$

は左辺に直和位相を考えたときに位相同型になるので，$\mathfrak{m}_R/(\mathfrak{m}_R^2 + \mathfrak{m}_\Lambda R)$ への制限によって定まる射

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_\Lambda}\big(R/(\mathfrak{m}_R^2 + \mathfrak{m}_\Lambda R), k[\epsilon]\big) \to \mathrm{Hom}_{k\text{-cont}}\big(\mathfrak{m}_R/(\mathfrak{m}_R^2 + \mathfrak{m}_\Lambda R), k\big)$$

は同型となる．以上より主張が従う． □

次に，普遍変形環 $R_{\bar{\rho}}$ が Noether 環になるための必要十分条件について述べる．

命題 3.3. $\mathrm{End}_{k[G]} V = k$ とし，$R_{\bar{\rho}}$ を $\bar{\rho}$ の普遍変形環とする．$R_{\bar{\rho}}$ が Noether 環であることと $H^1\big(G, \mathrm{Ad}(\bar{\rho})\big)$ が k 上有限次元であることは同値である．

証明. 命題 3.1 より，$H^1\big(G, \mathrm{Ad}(\bar{\rho})\big)$ が k 上有限次元であることは $t_{R_{\bar{\rho}}}$ が k 上有限次元であることと同値である．$R_{\bar{\rho}}$ を離散 Artin 商の射影極限として $\varprojlim_i R_i$ と表す．すると，補題 3.2 より

$$t_{R_{\bar{\rho}}} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_\Lambda}(R_{\bar{\rho}}, k[\epsilon]) \cong \varinjlim_i \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_\Lambda}(R_i, k[\epsilon]) \cong \varinjlim_i \mathrm{Hom}_k\big(\mathfrak{m}_{R_i}/(\mathfrak{m}_{R_i}^2 + \mathfrak{m}_\Lambda R_i), k\big)$$

となる．この同型において，最右辺の推移写像は単射なので，$t_{R_{\bar{\rho}}}$ が k 上有限次元であることは $\dim_k\bigl(\mathfrak{m}_{R_i}/(\mathfrak{m}_{R_i}^2+\mathfrak{m}_\Lambda R_i)\bigr)$ が i に関して有界であることと同値である．Λ は Noether 環なので $\dim_k(\mathfrak{m}_\Lambda/\mathfrak{m}_\Lambda^2)$ は有限であり，$\dim_k\bigl(\mathfrak{m}_{R_i}/(\mathfrak{m}_{R_i}^2+\mathfrak{m}_\Lambda R_i)\bigr)$ と $\dim_k(\mathfrak{m}_{R_i}/\mathfrak{m}_{R_i}^2)$ は高々 $\dim_k(\mathfrak{m}_\Lambda/\mathfrak{m}_\Lambda^2)$ しか違わない．よって $\dim_k\bigl(\mathfrak{m}_{R_i}/(\mathfrak{m}_{R_i}^2+\mathfrak{m}_\Lambda R_i)\bigr)$ が i に関して有界であることと $\dim_k(\mathfrak{m}_{R_i}/\mathfrak{m}_{R_i}^2)$ が i に関して有界であることは同値である．さらに，命題 A.2 を用いると主張が従う． □

例 3.4. $H^1\bigl(G,\mathrm{Ad}(\bar{\rho})\bigr)$ が k 上有限次元になる例としては，以下のようなものがある．

1. K を p 進体とする．$G=G_K$ のとき，$H^1\bigl(G,\mathrm{Ad}(\bar{\rho})\bigr)$ は k 上有限次元になる．
2. K を代数体とし，S を K の素点の有限集合で K の無限素点をすべて含むものとする．G が S の外で不分岐な最大代数拡大の K 上の Galois 群のとき，$H^1\bigl(G,\mathrm{Ad}(\bar{\rho})\bigr)$ は k 上有限次元になる．

4 変形の障害

定理 4.1. A_0, A_1 を $\mathcal{C}_\Lambda$ の対象とし，$p_{1,0}: A_1\to A_0$ を $\mathcal{C}_\Lambda$ における全射とする．$I=\mathrm{Ker}\,p_{1,0}$ とおく．$I\mathfrak{m}_{A_1}=0$ であると仮定し，I を k ベクトル空間とみなす．(ρ_{A_0},ψ_{A_0}) を $\bar{\rho}$ の A_0 上の変形とする．このとき (ρ_{A_0},ψ_{A_0}) の $p_{1,0}$ に関する障害類 $\mathcal{O}(\rho_{A_0},\psi_{A_0})\in H^2\bigl(G,\mathrm{Ad}(\bar{\rho})\otimes_k I\bigr)$ が存在し，次の二つが同値になる．

1. $\mathcal{O}(\rho_{A_0},\psi_{A_0})$ が消える．
2. $\bar{\rho}$ の A_1 上の変形 (ρ_{A_1},ψ_{A_1}) で $D_{\bar{\rho}}(p_{1,0}): D_{\bar{\rho}}(A_1)\to D_{\bar{\rho}}(A_0)$ による像が (ρ_{A_0},ψ_{A_0}) になるものがある．

証明. (ρ_{A_0},ψ_{A_0}) の実現 $\rho_0\in\mathrm{Hom}_{\bar{\rho}}\bigl(G,\mathrm{GL}_n(A_0)\bigr)$ をとる．集合としての写像 $\gamma_1: G\to\mathrm{GL}_n(A_1)$ を，$\mathrm{GL}_n(p_{1,0})\circ\gamma_1=\rho_0$ となるようにとる．$c: G\times G\to\mathrm{Ad}(\bar{\rho})\otimes_k I$ を，$g_1,g_2\in G$ に対して，

$$c(g_1,g_2)=\gamma_1(g_1g_2)\gamma_1(g_2)\gamma_1(g_1)\in 1+\mathrm{M}_n(k)\otimes_k I\cong\mathrm{Ad}(\bar{\rho})\otimes_k I$$

とすることで定めると，c は連続 G 加群 $\mathrm{Ad}(\bar{\rho})\otimes_k I$ の連続 2 コサイクルとなる．c の定める $H^2\bigl(G,\mathrm{Ad}(\bar{\rho})\otimes_k I\bigr)$ のコホモロジー類を $\mathcal{O}(\rho_{A_0},\psi_{A_0})$ とおく．$\mathcal{O}(\rho_{A_0},\psi_{A_0})$ が ρ_0 や γ_1 の取り方によらないことと，示すべき性質をみたすことは容易に確かめられる． □

命題 4.2. $\mathrm{End}_{k[G]}V=k$ とし，$R_{\bar{\rho}}$ を $\bar{\rho}$ の普遍変形環とする．$i=1,2$ に対して，$d_i=\dim_k H^i\bigl(G,\mathrm{Ad}(\bar{\rho})\bigr)$ とおく．d_1 が有限であると仮定する．このとき

$$\mathrm{Krull}\dim(R_{\bar{\rho}}/\mathfrak{m}_\Lambda R_{\bar{\rho}})\geq d_1-d_2$$

が成り立つ．

さらに，$d_2=0$ ならば，上の不等式は等式になり，$R_{\bar{\rho}}$ は Λ 上の d_1 変数の形式的べき級数環と同型になる．

証明．d_1 が有限なので，命題3.3より $R_{\bar\rho}$ は Noether 環である．Zariski 接空間に同型を誘導するような連続 k 代数準同型 $f_0 : k[[X_1,\dots,X_{d_1}]] \to R_{\bar\rho}/\mathfrak{m}_\Lambda R_{\bar\rho}$ をとる．$\mathfrak{m}$ を $k[[X_1,\dots,X_{d_1}]]$ の極大イデアルとし，$J = \mathrm{Ker}\, f_0$ とおく．

$\bar f_0 : k[[X_1,\dots,X_{d_1}]]/\mathfrak{m}J \to R_{\bar\rho}/\mathfrak{m}_\Lambda R_{\bar\rho}$ を f_0 から誘導される連続 k 代数準同型とし，短完全系列

$$0 \to J/\mathfrak{m}J \to k[[X_1,\dots,X_{d_1}]]/\mathfrak{m}J \xrightarrow{\bar f_0} R_{\bar\rho}/\mathfrak{m}_\Lambda R_{\bar\rho} \to 0$$

を考える．$\bar\rho$ の $R_{\bar\rho}$ 上の普遍変形から誘導される $R_{\bar\rho}/\mathfrak{m}_\Lambda R_{\bar\rho}$ 上の変形を (ρ_0,ψ_0) とする．$\bar f_0$ に関する (ρ_0,ψ_0) の障害類 $\mathcal{O}(\rho_0,\psi_0) \in H^2\big(G, \mathrm{Ad}(\bar\rho)\otimes_k J/\mathfrak{m}J\big)$ を考える．Artin-Rees の補題より $J/\mathfrak{m}J$ の位相は離散位相になるので，任意の $f \in \mathrm{Hom}_k(J/\mathfrak{m}J, k)$ は連続写像となり，

$$T_f : \mathrm{Ad}(\bar\rho)\otimes_k J/\mathfrak{m}J \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes f} \mathrm{Ad}(\bar\rho)\otimes_k k \cong \mathrm{Ad}(\bar\rho)$$

は連続 G 加群準同型となる．写像

$$\Phi : \mathrm{Hom}_k(J/\mathfrak{m}J, k) \to H^2\big(G, \mathrm{Ad}(\bar\rho)\big);\ f \mapsto H^2(G, T_f)\big(\mathcal{O}(\rho_0,\psi_0)\big)$$

を考える．

Φ が単射であることを示す．ある $f \in \mathrm{Hom}_k(J/\mathfrak{m}J, k)$ に対し，$\Phi(f) = 0$ かつ $f \neq 0$ となったとする．$k[[X_1,\dots,X_{d_1}]]/\mathfrak{m}J$ を $\mathrm{Ker}\, f$ で割った位相環を R' とする．$f_0' : R' \to R_{\bar\rho}/\mathfrak{m}_\Lambda R_{\bar\rho}$ を $\bar f_0$ から誘導される連続 k 代数準同型とし，短完全系列

$$0 \to k \to R' \xrightarrow{f_0'} R_{\bar\rho}/\mathfrak{m}_\Lambda R_{\bar\rho} \to 0$$

を考える．$\Phi(f) = 0$ であったことから，f_0' に関する (ρ_0,ψ_0) の障害類は消える．$\bar\rho$ の R' 上の変形 (ρ',ψ') で $D_{\bar\rho}(f_0')$ による像が (ρ_0,ψ_0) になるものがある．R' は k 代数なので，(ρ',ψ') の定める $R_{\bar\rho} \to R'$ は $g_0' : R_{\bar\rho}/\mathfrak{m}_\Lambda R_{\bar\rho} \to R'$ を誘導し，$f_0' \circ g_0' = \mathrm{id}_{R_{\bar\rho}/\mathfrak{m}_\Lambda R_{\bar\rho}}$ となる．g_0' は単射かつ Zariski 接空間に同型を誘導する．よって g_0' は同型となり，f_0' も同型となる．これは矛盾．以上により，Φ が単射であることが示された．

$k[[X_1,\dots,X_{d_1}]]$ のイデアル J は $\dim_k J/\mathfrak{m}J$ 個の元で生成されるので，

$$\mathrm{Krull}\dim(R_{\bar\rho}/\mathfrak{m}_\Lambda R_{\bar\rho}) \geq d_1 - \dim_k J/\mathfrak{m}J$$

である．さらに Φ が単射であることより，$\dim_k J/\mathfrak{m}J \leq d_2$ なので一つ目の主張が従う．

$d_2 = 0$ ならば，Φ が単射であることより $J = 0$ がわかる．よって f_0 は同型となり，$\mathrm{Krull}\dim(R_{\bar\rho}/\mathfrak{m}_\Lambda R_{\bar\rho}) = d_1$ となる．図式

$$\begin{array}{ccc} \Lambda[[X_1,\dots,X_{d_1}]] & \xrightarrow{f} & R_{\bar\rho} \\ \downarrow & & \downarrow \\ k[[X_1,\dots,X_{d_1}]] & \xrightarrow{f_0} & R_{\bar\rho}/\mathfrak{m}_\Lambda R_{\bar\rho} \end{array}$$

を可換にするような $f : \Lambda[[X_1, \dots, X_{d_1}]] \to R_{\bar\rho}$ をとると，f は Zariski 接空間に同型を誘導するので，全射となる．

次に，$\mathcal{C}_\Lambda$ の射

$$g_1 : R_{\bar\rho} \to R_{\bar\rho}/\mathfrak{m}_\Lambda R_{\bar\rho} \xrightarrow{f_0^{-1}} k[[X_1, \dots, X_{d_1}]] \to k[X_1, \dots, X_{d_1}]/(X_1, \dots, X_{d_1})^2$$

を考える．g_1 は Zariski 接空間に同型を誘導する．$d_2 = 0$ なので，g_1 に対応する $k[X_1, \dots, X_{d_1}]/(X_1, \dots, X_{d_1})^2$ 上の変形の

$$\Lambda[[X_1, \dots, X_{d_1}]]/(\mathfrak{m}_\Lambda, X_1, \dots, X_{d_1})^2 \to k[X_1, \dots, X_{d_1}]/(X_1, \dots, X_{d_1})^2$$

に関する障害類は消えており，g_1 は

$$g_2 : R_{\bar\rho} \to \Lambda[[X_1, \dots, X_{d_1}]]/(\mathfrak{m}_\Lambda, X_1, \dots, X_{d_1})^2$$

に持ち上がる．同様の理由により，$m \geq 2$ に対し帰納的に

$$g_m : R_{\bar\rho} \to \Lambda[[X_1, \dots, X_{d_1}]]/(\mathfrak{m}_\Lambda, X_1, \dots, X_{d_1})^m$$

は

$$g_{m+1} : R_{\bar\rho} \to \Lambda[[X_1, \dots, X_{d_1}]]/(\mathfrak{m}_\Lambda, X_1, \dots, X_{d_1})^{m+1}$$

に持ち上がる．よって $(g_m)_{m\geq 2}$ は $g : R_{\bar\rho} \to \Lambda[[X_1, \dots, X_{d_1}]]$ に持ち上がる．g は g_1 の持ち上げなので，Zariki 接空間に同型を誘導し，全射となる．よって，全射

$$g \circ f : \Lambda[[X_1, \dots, X_{d_1}]] \to \Lambda[[X_1, \dots, X_{d_1}]]$$

が存在する．$\mathrm{Ker}\, f \neq 0$ と仮定すると，$\bigl(\mathrm{Ker}(g \circ f)^m\bigr)_{m\geq 1}$ が $\Lambda[[X_1, \dots, X_{d_1}]]$ のイデアルの真の無限増大列となり $\Lambda[[X_1, \dots, X_{d_1}]]$ が Noether 環であることに矛盾する．よって，f は同型となり二つ目の主張が示された． □

注意 4.3. 例 *3.4* の 1 あるいは 2 の場合に，さらに k が有限体ならば，命題 *4.2* の $d_1 - d_2$ は，Euler-Poincaré 標数公式を用いて計算できる．

5　条件付きの変形

S を $D_{\bar\rho}$ の部分関手とする．S が条件 (R) をみたすとは，以下の条件をみたすこととする．

1. $S(k) = D_{\bar\rho}(k)$.

2. (ρ_A, ψ_A) を $A \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}_\Lambda$ 上の変形とすると，$(\rho_A, \psi_A) \in S(A)$ となることと $\mathfrak{a} \neq A$ である A の任意の開イデアル $\mathfrak{a}$ に対して $(\rho_A \otimes_A A/\mathfrak{a}, \psi_A \otimes_A A/\mathfrak{a}) \in S(A/\mathfrak{a})$ となることは同値である．

3. (ρ_A, ψ_A) を $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}_\Lambda$ 上の変形とし，$\mathfrak{a} \neq A$，$\mathfrak{b} \neq A$ である A の開イデアル $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ に対して $(\rho_A \otimes_A A/\mathfrak{a}, \psi_A \otimes_A A/\mathfrak{a}) \in S(A/\mathfrak{a})$，$(\rho_A \otimes_A A/\mathfrak{b}, \psi_A \otimes_A A/\mathfrak{b}) \in S(A/\mathfrak{b})$ となるならば，$\big(\rho_A \otimes_A A/(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}), \psi_A \otimes_A A/(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})\big) \in S\big(A/(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})\big)$ となる．

4. (ρ_A, ψ_A) を $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}_\Lambda$ 上の変形とし，$A \to A'$ を Artin 局所環である $\mathcal{C}_\Lambda$ の対象の間の単射 Λ 代数準同型とすると，$(\rho_A, \psi_A) \in S(A)$ であることと $(\rho_A \otimes_A A', \psi_A \otimes_A A') \in S(A')$ であることは同値である．

定理 5.1. $\mathrm{End}_{k[G]}\,V = k$ とし，$R_{\bar\rho}$ を $\bar\rho$ の普遍変形環とする．$D_{\bar\rho}$ の部分関手 S が条件 (R) をみたすならば，$R_{\bar\rho}$ の閉イデアル $\mathfrak{a}_S$ が存在して，$R_{\bar\rho}/\mathfrak{a}_S \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}_\Lambda$ となり，任意の $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}_\Lambda$ に対し，自然な全単射 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_\Lambda}(R_{\bar\rho}, A) \to D_{\bar\rho}(A)$ は全単射 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_\Lambda}(R_{\bar\rho}/\mathfrak{a}_S, A) \to S(A)$ を誘導する．

証明. $(\rho_{R_{\bar\rho}}, \psi_{R_{\bar\rho}})$ を $R_{\bar\rho}$ 上の普遍変形とし，X_S を $(\rho_{R_{\bar\rho}} \otimes_{R_{\bar\rho}} R_{\bar\rho}/\mathfrak{a}, \psi_{R_{\bar\rho}} \otimes_{R_{\bar\rho}} R_{\bar\rho}/\mathfrak{a}) \in S(R_{\bar\rho}/\mathfrak{a})$ となる $R_{\bar\rho}$ の開イデアル $\mathfrak{a}$ 全体の集合とする．$\mathfrak{a}_S = \bigcap_{\mathfrak{a} \in X_S} \mathfrak{a}$ とおくと，命題 A.3 より，自然な射 $R_{\bar\rho} \to \varprojlim_{\mathfrak{a} \in X_S} R_{\bar\rho}/\mathfrak{a}$ は，位相環同型 $R_{\bar\rho}/\mathfrak{a}_S \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{\mathfrak{a} \in X_S} R_{\bar\rho}/\mathfrak{a}$ を誘導する．$\mathfrak{a}_S$ が示すべき性質をみたすことは，容易に確かめられる． □

$A \in \mathcal{C}_\Lambda$ と階数 n の有限生成自由 A 加群 M への G の連続表現 $\rho_A : G \to \mathrm{Aut}_A(M)$ に対し，ρ_A から誘導される群準同型

$$G \to \mathrm{Aut}_A(\bigwedge_A^n M) \cong A^\times$$

を $\det_{\rho_A}$ で表す．

$\delta : G \to \Lambda^\times$ を連続群準同型とする．$A \in \mathcal{C}_\Lambda$ に対して，合成群準同型

$$\delta_A : G \xrightarrow{\delta} \Lambda^\times \to A^\times$$

とする．ただし $\Lambda^\times \to A^\times$ は，A の Λ 代数構造から誘導される自然な群準同型とする．$D_{\bar\rho}$ の部分関手 $D_{\bar\rho,\delta}$ を，$A \in \mathcal{C}_\Lambda$ に対して

$$D_{\bar\rho,\delta}(A) = \left\{ (\rho_A : G \to \mathrm{Aut}_A(M), \psi_A) \in D_{\bar\rho}(A) \;\middle|\; \det_{\rho_A} = \delta_A \right\}$$

とすることで定める．このとき次が成り立つ．

命題 5.2. $\mathrm{End}_{k[G]}\,V = k$ かつ $D_{\bar\rho,\delta}(k) = D_{\bar\rho}(k)$ ならば，$D_{\bar\rho,\delta}$ を表現する $R_{\bar\rho,\delta} \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}_\Lambda$ が存在する．

証明. $D_{\bar\rho,\delta}$ が条件 (R) をみたすことが容易に確かめられるので，定理 5.1 より主張が従う． □

I を G の正規閉部分群とし，$n = 2$ とする．$A \in \mathcal{C}_\Lambda$ に対して，$\bar\rho$ の A 上の変形 $(\rho_A : G \to \mathrm{Aut}_A(M), \psi_A)$ が I 通常であるとは，M の I 不変部分 M^I が M の A 上階数 1 の直和因子になっていることとする．I 通常である変形は $D_{\bar\rho}$ の部分関手 $D_{\bar\rho}^{\mathrm{ord}}$ を定める．

命題 5.3. $\mathrm{End}_{k[G]} V = k$ かつ $D^{\mathrm{ord}}_{\bar\rho}(k) = D_{\bar\rho}(k)$ ならば，$D^{\mathrm{ord}}_{\bar\rho}$ を表現する $R^{\mathrm{ord}}_{\bar\rho} \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}_\Lambda$ が存在する．

証明. $(\rho_A : G \to \mathrm{Aut}_A(M), \psi_A)$ を $\bar\rho$ の $A \in \mathcal{C}_\Lambda$ 上の変形とする．$\bar\rho$ の k 上の自明な変形が I 通常なので，(ρ_A, ψ_A) が I 通常であることと $\psi_A(x \otimes 1) \neq 0$ となる $x \in M^I$ が存在することは同値である．

V への作用が自明でない $g_0 \in I$ をとる．$A[G]$ を A 係数の G の群環とする．任意の $g \in I$ に対し，M が $(g-1)\big(g_0 - \det_{\rho_A}(g_0)\big) \in A[G]$ の作用で消えるという条件を条件 (C_I) ということにする．(ρ_A, ψ_A) が I 通常であることの必要十分条件が条件 (C_I) であることを示す.

必要条件であることは明らか．十分条件であることを示す．条件 (C_I) が成り立つとする．$y_0, \big(g_0 - \det_{\bar\rho}(g_0)\big)(y_0)$ が k 上一次独立になる $y_0 \in V$ をとる．$\psi_A(y \otimes 1) = y_0$ となる $y \in M$ をとって，$x = \big(g_0 - \det_{\rho_A}(g_0)\big)(y)$ とおくと $x \in M^I$ かつ $\psi_A(x \otimes 1) \neq 0$ となるので，(ρ_A, ψ_A) は I 通常となる．

(ρ_A, ψ_A) が I 通常であることの必要十分条件が，条件 (C_I) であることを使うと，$D^{\mathrm{ord}}_{\bar\rho}$ が条件 (R) をみたすことは容易に確かめられる．よって，定理 5.1 より主張が従う． $\square$

n は再び一般の正の整数とする．K を p 進体とし，$G = G_K$ で，k は標数 p の有限体であるとする．

Artin 環である $A \in \mathcal{C}_\Lambda$ に対して，A 上の変形 (ρ_A, ψ_A) が有限平坦であるとは，ρ_A が $\mathcal{O}_K$ 上のある有限平坦群スキームの一般ファイバーから得られる G_K 加群と同型であることとする．一般の $A \in \mathcal{C}_\Lambda$ に対して，(ρ_A, ψ_A) を A 上の変形とする．A の任意の離散 Artin 商 A' に対して $(\rho_A \otimes_A A', \psi_A \otimes_A A')$ が有限平坦であるとき，(ρ_A, ψ_A) は有限平坦であるという．有限平坦な変形は $D_{\bar\rho}$ の部分関手 $D^{\mathrm{fl}}_{\bar\rho}$ を定める．

命題 5.4. $\mathrm{End}_{k[G]} V = k$ かつ $D^{\mathrm{fl}}_{\bar\rho}(k) = D_{\bar\rho}(k)$ ならば，$D^{\mathrm{fl}}_{\bar\rho}$ を表現する $R^{\mathrm{fl}}_{\bar\rho} \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}_\Lambda$ が存在する．

証明. 有限平坦性は，有限直積，部分加群，商加群をとる操作で保存されるので，$D^{\mathrm{fl}}_{\bar\rho}$ が条件 (R) をみたすことがわかる．よって，定理 5.1 より主張が従う． $\square$

A 環論の補足

補題 A.1. $A \in \mathcal{C}_\Lambda$ とし，A を離散 Artin 商の射影極限として $\varprojlim_i A_i$ と表す．$1 \leq j \leq 3$ に対し，(M_i^j) を有限生成 A_i 加群 M_i^j のなす加群の射影系とし，

$$(M_i^1) \to (M_i^2) \to (M_i^3) \tag{A.1}$$

を加群の射影系の完全列とする．射影系 (A_i) の任意の推移写像 $A_i \to A_{i'}$ と $1 \leq j \leq 3$ に対し，推移写像 $M_i^j \to M_{i'}^j$ は A_i 線型であると仮定する．このとき，射影系の完全列 (A.1) は A 加群の完全列

$$\varprojlim_i M_i^1 \to \varprojlim_i M_i^2 \to \varprojlim_i M_i^3$$

を誘導する．

証明．任意の i と $1 \leq j \leq 3$ に対し，M_i^j は Artin A 加群である．Artin A 加群の列は Mittag-Leffler 条件をみたすので主張が従う． □

命題 A.2. $A \in \mathcal{C}_\Lambda$ とし，A を離散 Artin 商の射影極限として $\varprojlim_i A_i$ と表す．この時，次の二つの条件は同値である．

1. A は Noether 環である．
2. $\dim_k(\mathfrak{m}_{A_i}/\mathfrak{m}_{A_i}^2)$ は i に関して有界である．

また，これらの条件が成り立つとき，A の位相は $\mathfrak{m}_A$ 進位相である．

証明．条件 1 から条件 2 が従うのは明らかである．条件 2 を仮定して，A が Noether 環になることと A の位相が $\mathfrak{m}_A$ 進位相になることを示せばよい．

まず，任意の非負整数 m に対して $\mathfrak{m}_A^m \xrightarrow{\sim} \varprojlim_i \mathfrak{m}_{A_i}^m$ となることを m に関する帰納法で示す．$m = 0$ のときは明らかである．m を非負整数とする．$\mathfrak{m}_A^m \xrightarrow{\sim} \varprojlim_i \mathfrak{m}_{A_i}^m$ を仮定して，$\mathfrak{m}_A^{m+1} \xrightarrow{\sim} \varprojlim_i \mathfrak{m}_{A_i}^{m+1}$ を示す．完全列

$$0 \to \mathfrak{m}_{A_i}^{m+1} \to \mathfrak{m}_{A_i}^m \to \mathfrak{m}_{A_i}^m/\mathfrak{m}_{A_i}^{m+1} \to 0 \tag{A.2}$$

を考える．$N = \varprojlim_i \mathfrak{m}_{A_i}^m/\mathfrak{m}_{A_i}^{m+1}$ とおく．条件 2 より，$\dim_k(\mathfrak{m}_{A_i}^m/\mathfrak{m}_{A_i}^{m+1})$ は i に関して有界なので，十分大きい任意の i に対して自然な射 $\mathfrak{m}_{A_{i+1}}^m/\mathfrak{m}_{A_{i+1}}^{m+1} \to \mathfrak{m}_{A_i}^m/\mathfrak{m}_{A_i}^{m+1}$ は同型となる．よって N は k 上の有限次元ベクトル空間になる．完全列 (A.2) の i に関する射影極限をとると，補題 A.1 より

$$0 \to \varprojlim_i \mathfrak{m}_{A_i}^{m+1} \to \mathfrak{m}_A^m \to N \to 0 \tag{A.3}$$

となる．$l = \dim_k N$ とおく．N の k 上基底の $\mathfrak{m}_A^m$ への持ち上げ $a_1, \ldots, a_l$ をとる．a_j の A_i における像を $a_{j,i}$ とおく．すると任意の i に対して

$$A_i^l \to \mathfrak{m}_{A_i}^m;\ (x_1, \ldots x_l) \mapsto x_1 a_{1,i} + \cdots + x_l a_{l,i}$$

は全射となる．この全射の i に関する射影極限をとると，補題 A.1 と帰納法の仮定より，$\mathfrak{m}_A^m$ が A のイデアルとして $a_1, \ldots, a_l$ で生成されることがわかる．以上より

$$l \geq \dim_k(\mathfrak{m}_A^m/\mathfrak{m}_A^{m+1}) \geq \dim_k(N) = l$$

となるので，$\mathfrak{m}_A^{m+1}$ が (A.3) の全射 $\mathfrak{m}_A^m \to N$ の核になることがわかり，$\mathfrak{m}_A^{m+1} \xrightarrow{\sim} \varprojlim_i \mathfrak{m}_{A_i}^{m+1}$ が示される．

次に A が Noether 環になることを示す．すでに示したことから，$\mathfrak{m}_A$ の A のイデアルとしての有限個の生成元 $b_1, \ldots, b_h$ がとれる．A の位相は $\mathfrak{m}_A$ 進位相より粗いので，Λ 代数としての全射

$$\Lambda[[X_1, \ldots, X_h]] \to A;\ X_j \mapsto b_j$$

が定まり，A は Noether 環になる．

最後に A の位相が $\mathfrak{m}_A$ 進位相になることを示す．A の位相は $\mathfrak{m}_A$ 進位相より粗いので，任意の非負整数 m に対し，$\mathfrak{m}_A^m$ が A の開イデアルになることを示せばよい．m を非負整数とする．完全列

$$0 \to \mathfrak{m}_{A_i}^m \to A_i \to A_i/\mathfrak{m}_{A_i}^m \to 0$$

に補題 A.1 を使うと，$\mathfrak{m}_A^m = \varprojlim_i \mathfrak{m}_{A_i}^m$ より $A/\mathfrak{m}_A^m \cong \varprojlim_i A_i/\mathfrak{m}_{A_i}^m$ がわかる．条件 2 より $\dim_k\bigl(A_i/\mathfrak{m}_{A_i}^m\bigr)$ は i に関して有界なので，十分大きい任意の i に対して自然な射 $A_{i+1}/\mathfrak{m}_{A_{i+1}}^m \to A_i/\mathfrak{m}_{A_i}^m$ は同型となる．よって，ある i に対して，自然な射 $A \to A/\mathfrak{m}_A^m$ は A_i を経由する．これにより，$\mathfrak{m}_A^m$ が A の開イデアルになることがわかる． □

命題 A.3. $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}_\Lambda$ とする．X を有限個の共通部分をとる操作で閉じているような A の開イデアルの空でない集合とする．$F = \bigcap_{\mathfrak{a}\in X} \mathfrak{a}$ とおく．このとき自然な射 $A \to \varprojlim_{\mathfrak{a}\in X} A/\mathfrak{a}$ は位相環同型 $A/F \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{\mathfrak{a}\in X} A/\mathfrak{a}$ を誘導する．

証明．自然な射 $\mathfrak{a} \to A_i$ の余核を $A_i^{\mathfrak{a}}$ とかく．$\mathfrak{a}_0$ を A の開イデアルとする．$\mathfrak{a}_0$ の A_i における像を $\mathfrak{a}_{0,i}$ とかき，$A_i^{\mathfrak{a}}$ における像を $\mathfrak{a}_{0,i}^{\mathfrak{a}}$ とかく．$\mathfrak{a}_{0,i}$ は Artin A_i 加群なので，自然な射 $\mathfrak{a}_{0,i} \to \varprojlim_{\mathfrak{a}\subset A} \mathfrak{a}_{0,i}^{\mathfrak{a}}$ は全射である．この全射に対し，補題 A.1 を用いると全射

$$\mathfrak{a}_0 \cong \varprojlim_i \mathfrak{a}_{0,i} \to \varprojlim_i \varprojlim_{\mathfrak{a}\subset A} \mathfrak{a}_{0,i}^{\mathfrak{a}} \cong \varprojlim_{\mathfrak{a}\subset A} \varprojlim_i \mathfrak{a}_{0,i}^{\mathfrak{a}} \cong \varprojlim_{\mathfrak{a}\subset A} \bigl((\mathfrak{a}_0+\mathfrak{a})/\mathfrak{a}\bigr)$$

が得られる．特に，$\mathfrak{a}_0 = A$ とすると $A \to \varprojlim_{\mathfrak{a}\subset A} A/\mathfrak{a}$ が全射になることがわかる．また，$\mathfrak{a}_0$ の $\varprojlim_{\mathfrak{a}\subset A} A/\mathfrak{a}$ における像が $\varprojlim_{\mathfrak{a}\subset A}\bigl((\mathfrak{a}_0+\mathfrak{a})/\mathfrak{a}\bigr)$ になることもわかる．補題 A.1 より

$$0 \to \varprojlim_{\mathfrak{a}\subset A}\bigl((\mathfrak{a}_0+\mathfrak{a})/\mathfrak{a}\bigr) \to \varprojlim_{\mathfrak{a}\subset A} A/\mathfrak{a} \to \varprojlim_{\mathfrak{a}\subset A} A/(\mathfrak{a}_0+\mathfrak{a}) \to 0$$

は完全列となる．$\varprojlim_{\mathfrak{a}\subset A} A/(\mathfrak{a}_0+\mathfrak{a})$ は離散 Artin 環なので $\varprojlim_{\mathfrak{a}\subset A}\bigl((\mathfrak{a}_0+\mathfrak{a})/\mathfrak{a}\bigr)$ が $\varprojlim_{\mathfrak{a}\subset A} A/\mathfrak{a}$ の開イデアルになることがわかる．よって全射 $A \to \varprojlim_{\mathfrak{a}\subset A} A/\mathfrak{a}$ は開写像となり主張が従う． □

参考文献

[Ma1] B. Mazur, *Deforming Galois representations*, Galois groups over $\mathbb{Q}$ (Berkeley, CA, 1987), 385–437, Math. Sci. Res. Inst. Publ. 16, Springer, New York, 1989.

[Ma2] B. Mazur, *An introduction to the deformation theory of Galois representations*, Modular forms and Fermat's last theorem (Boston, MA, 1995), 243–311, Springer, New York, 1997.

[Sch] M. Schlessinger, *Functors on Artin rings*, Trans. Amer. Math. Soc. **130** (1968), 208–222.

[SL] B. de Smit, H. W. Lenstra, Jr. *Explicit construction of universal deformation rings*, Modular forms and Fermat's last theorem (Boston, MA, 1995), 313–326, Springer, New York, 1997.

[TW] R. Taylor, A. Wiles, *Ring-theoretic properties of certain Hecke algebras* Ann. of Math. (2) **141** (1995), no. 3, 553–572.

[W] A. Wiles, *Modular elliptic curves and Fermat's last theorem* Ann. of Math. (2) **141** (1995), no. 3, 443–551.

[斎藤] 斎藤毅, フェルマー予想, 岩波書店, 2009.