p-進表現論入門.

中村　健太郎　(慶應数理)

Contents

1. イントロダクション.

本稿は, 2009 年整数論サマースクール「l-進ガロア表現とガロア表現の整数論」での講演「p-進表現論入門 I, II」の報告集である. 本稿では, 講演での解説に沿って, §2 で Fontaine による p-進周期環の定義と p-進表現の分類に関する基本事項, §3 で p-進エタールコホモロジーとドラームコホモロジー, クリスタリンコホモロジーとの比較同型, §4 で (p-進表現の族に対しての)Tate-Sen の理論について解説する.

p を素数とし, K を p-進体, つまり $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大体とする. $\overline{K}$ を K の代数閉包, $G_K := \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ を K の絶対ガロア群とする. $\mathcal{O}_K$ を K の整数環, $\pi_K \in \mathcal{O}_K$ を K の素元, $k := \mathcal{O}_K/\pi_K\mathcal{O}_K$ を K の剰余体とする. $v_p : \overline{K} \to \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ を $v_p(p) = 1$ を満たす p-進付値とする. K_0 を $\mathbb{Q}_p$ の K 内での最大不分岐拡大, K^{ur} を K の $\overline{K}$ 内での最大不分岐拡大とする. $I_K := \mathrm{Gal}(\overline{K}/K^{\mathrm{ur}})$ を K の惰性群とする. p-進円分指標を $\chi : G_K \to \mathbb{Z}_p^{\times}$(つまり, 任意の 1 の p^n 乗根 $\zeta_{p^n} \in \overline{K}$ と $g \in G_K$ に対して $g(\zeta_{p^n}) = \zeta_{p^n}^{\chi(g)}$ となる指標) と表す. $\mathbb{C}_p := \widehat{\overline{K}}$ を p-進複素数体 ($\overline{K}$ の p-進完備化, 代数閉体になる) とする.

まず, 本稿での主役, G_K の p-進表現は次のように定義される対象である.

Definition 1.1. V が (G_K の)p-進表現であるとは, V は有限次元 $\mathbb{Q}_p$-ベクトル空間で G_K が連続 $\mathbb{Q}_p$-線形に作用しているもの, と定義する (ここで, G_K には Krull 位相が入り, V は $\mathbb{Q}_p$ の直和としての p-進位相が入っている). G_K の p-進表現の圏を Rep_{G_K} と表す.

以下, K について混乱が生じない場合は単に p-進表現と呼ぶことにする. p-進表現は l-進表現 ($l \neq p$) の場合と同様に K 上の代数多様体 X_K のエタールコホモロジー ($\mathrm{H}^i_{\acute{e}t}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)$) として, 数論幾何において自然に現れる対象である. 本報告集三枝氏の解説 ([Mi]) にあるように, l-進表現 ($l \neq p$) の場合は, K 上の代数多様体 X_K の特殊ファイバー X_k への還元の幾何的な性質が $\mathrm{H}^i_{\acute{e}t}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_l)$ の l-進表現としての性質に強く反映されていた. つまり, $X_K \mapsto \mathrm{H}^i_{\acute{e}t}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_l)$ という対応により,

$$\left\{\begin{array}{l}\text{良い}\\\text{還元}\end{array}\right\} \subset \left\{\begin{array}{l}\text{準安定}\\\text{還元}\end{array}\right\} \subset \left\{\begin{array}{l}\text{潜在的}\\\text{準安定還元}\end{array}\right\} \subset \left\{\begin{array}{l}\text{すべての}\\\text{代数多様体}\end{array}\right\}$$

という幾何側の包含関係が

$$\left\{\begin{array}{l}\text{不分岐}\\\text{表現}\end{array}\right\} \subset \left\{\begin{array}{l}\text{べき単}\\\text{表現}\end{array}\right\} \subset \left\{\begin{array}{l}\text{潜在的}\\\text{べき単表現}\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l}\text{すべての}\\l\text{-進表現}\end{array}\right\}$$

という l-進表現側の包含関係のと対応していた (最後の等号は Grothendieck の局所モノドロミー定理による).

§2, §3 の目的は, この対応の p-進類似として, K 上の代数幾何的な対象と p-進表現との対応関係 $(X_K \mapsto \mathrm{H}^i_{\acute{e}t}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p))$ を解説することである. このためにまずは, l-進表現の場合の (不分岐表現やベキ単表現の) ように, p-進表現の中で幾何的な対象と結びつくよいクラス達を定義する必要がある. これは $l(\neq p)$ 進表現の場合と比べて遥かに難しくなる. 一つの理由は, K の剰余標数と表現の係数の剰余標数が等しいために, p-進表現は l-進表現よりもはるかに複雑な構造を持ち, その分より豊富な情報を持つ対象になるからである (例えば, $l \neq p$ なら連続準同型のなす群 $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_l, \mathbb{Z}_p) = 0$ だが, $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_p$ となる). 例として, Tate 捻り $\mathbb{Q}_p(i)$ と $\mathbb{Q}_l(i)$ を考えると, $l \neq p$ の場合は $\mathbb{Q}_l(i)$ は G_K の不分岐表現 (I_K が自明に作用する表現) であったのだが, $\mathbb{Q}_p(i)$ は ($i \neq 0$ なら) 対応する指標 $\chi^i : G_K \to \mathbb{Z}_p^\times$ において $\chi^i(I_K)$ は常に $\mathbb{Z}_p^\times$ の開部分群になる. $\mathbb{Q}_p(i)$ などは幾何的には自然に現れる対象であるから (例えば, $\mathrm{H}^2_{\acute{e}t}(\mathbb{P}^1_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1_{\acute{e}t}(\mathbb{G}_{m,\overline{K}}, \mathbb{Q}_p) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}_p(-1)$ となる), 不分岐表現という条件は p-進表現論においては強過ぎる条件であることが分かる.

このような困難を打開したのが Fontaine で, 彼は様々な付加構造を持つ p-進周期環 ($B_{\mathrm{cris}}, B_{\mathrm{st}}$, B_{dR} など) を定義し, これらの環を用いて p-進表現のクラスを定義した. これらの p-進周期環と、これを用いて定義される様々な p-進表現のクラスについて解説するのが §2 の内容である.

§3 では, このクラス分けに基づいて, X_K の p-進エタールコホモロジーとドラームコホモロジー, および特殊ファイバー X_k の (ログ) クリスタリンコホモロジーとの比較同型について解説する.

最後の §4 は, §2, §3 とは比較的独立した内容であるのだが, ガロア変形において重要な Tate-Sen の理論を（p-進表現の族の場合に）解説する.

2. Fontaine の p-進周期環.

§2 の目的は, Fontaine ([Fo82], [Fo94a], [Fo94b], [Be04]) に従い B_{cris}, B_{st}, B_{dR} などの p-進周期環を定義し, p-進表現の幾何的に意味のある様々なクラスを定義することである. 具体的な環の定義に入る前にまずは導入として, p-進周期環を用いて p-進表現のクラスを定義する方法について簡単に解説する. まず, イントロダクションで解説したように p-進表現では不分岐表現は非常に狭い p-進表現のクラスであったが, これは次に紹介する命題のようにして p-進周期環

$$B_{\mathrm{ur}} := \widehat{\mathbb{Q}}_p^{\mathrm{ur}}$$

($\mathbb{Q}_p^{\mathrm{ur}}$ の p-進完備化) を用いても定義される. $V \in \mathrm{Rep}_{G_K}$ に対して,

$$D_{\mathrm{ur}}(V) := (B_{\mathrm{ur}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K}$$

と定義する. これには B_{ur} の Frobenius φ から誘導される Frobenius φ が作用している.

$$\begin{aligned} B_{\mathrm{ur}}^{G_K} &:= \{x \in B_{\mathrm{ur}} | g(x) = x \ (\text{任意の } g \in G_K)\} \\ &= K_0, \\ B_{\mathrm{ur}}^{\varphi=1} &:= \{x \in B_{\mathrm{ur}} | \varphi(x) = x\} \\ &= \mathbb{Q}_p \end{aligned}$$

となる.

$$B_{\mathrm{ur}} \otimes_{K_0} (B_{\mathrm{ur}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V) \to B_{\mathrm{ur}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V : a \otimes (b \otimes x) \mapsto ab \otimes x$$

から誘導される射

$$B_{\mathrm{ur}} \otimes_{K_0} D_{\mathrm{ur}}(V) \to B_{\mathrm{ur}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$$

は ($B_{\mathrm{ur}}^{G_K} = K_0$ であることから) 常に単射となり, 不等式

$$\dim_{K_0} D_{\mathrm{ur}}(V) \leqq \dim_{\mathbb{Q}_p} V$$

が常に成り立つ. この $D_{\mathrm{ur}}(V)$ を用いると V が不分岐表現であることを次のように特徴づけることが出来る.

Proposition 2.1. $V \in \mathrm{Rep}_{G_K}$ について次は同値.

(1) V は不分岐表現.

(2) 等号

$$\dim_{K_0} D_{\mathrm{ur}}(V) = \dim_{\mathbb{Q}_p} V$$

が成り立つ.

さらに, これらの条件を満たすとき, 自然な射

$$B_{\mathrm{ur}} \otimes_{K_0} D_{\mathrm{ur}}(V) \to B_{\mathrm{ur}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$$

は G_K と φ の作用を込めた同型で, p-進表現としての同型

$$(B_{\mathrm{ur}} \otimes_{K_0} D_{\mathrm{ur}}(V))^{\varphi=1} \xrightarrow{\sim} V$$

が成り立つ (つまり, V の情報を $D_{\mathrm{ur}}(V)$ から復元できる).

Proof. 証明は容易なので省略する. □

このように, G_K が作用し様々な付加構造を持つ p-進周期環

$$B_* \ (* = \mathrm{cris}, \mathrm{st}, \mathrm{dR}\ \text{など})$$

(この B_{ur} の場合は, 付加構造としては G_K-作用の他に φ 作用がある) を定義し,

$$D_*(V) := (B_* \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K}$$

と定義し, さらに, V が $*$-表現であることを

$$\dim_{K_*} D_*(V) = \dim_{\mathbb{Q}_p} V$$

(ここで, $K_* := B_*^{G_K}$ と置く) と定義することで, 様々なクラスを定義していきたい. その際重要なのは, $D_*(V)$ は単なる有限次元 K_*-ベクトル空間ではなく B_* の付加構造から誘導される様々な付加構造を有している点である. この付加構造により, ある場合には (例えば $D_{\mathrm{ur}}(V)$ の場合のように)V の情報が $D_*(V)$ の (線形代数的な) 情報から完全に復元出来てしまう.

今紹介した, 不分岐表現を特徴付ける p-進周期環 B_{ur} は $\mathbb{C}_p$ の部分体であり, 古くから知られている対象であったわけであるが, より一般の p-進表現をクラス分けするには $\mathbb{C}_p$ という体は小さ過ぎることが知られている. この事実を示すのが, 次に紹介する Tate の定理である. 任意の $i \in \mathbb{Z}$ に対し,

$$\mathbb{C}_p(i) := \mathbb{C}_p \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_p(i) = \mathbb{C}_p e_i$$

で, G_K が $g(ae_i) := \chi(g)^i g(a) e_i \ (a \in \mathbb{C}_p)$ と作用するものとする.

Theorem 2.2. (Tate[Ta67])

(1) $i = 0$ のとき, $\mathrm{H}^0(G_K, \mathbb{C}_p(0)) = \mathrm{H}^1(G_K, \mathbb{C}_p(0)) = K$.
(2) $i \neq 0$ のとき, $\mathrm{H}^j(G_K, \mathbb{C}_p(i)) = 0$ (任意の $j \geqq 0$).

Proof. 証明は §4 で行う. □

この定理の $H^0(G_K, -)$ の場合により, p-進周期環を用いて p-進表現をクラス分けするには ($i \neq 0$ となる $\mathbb{Q}_p(i)$ の場合にさえ)$\mathbb{C}_p$ よりも大きい環でないといけないことが分かる. 特に, $\mathbb{Q}_p(-1)$ の p-進周期は $\mathbb{C}_p$ の中には含まれないことが分かる。実素点の場合は, Tate 捻り $\mathbb{Q}(-1)$ は $\mathbb{G}_{m,\mathbb{R}}$ の特異コホモロジー及びドラームコホモロジーとして現れ, 積分によって与えられるベッチとドラームの比較同型によりその周期は $2\pi\sqrt{-1}$ となっていた. 以上より, $2\pi\sqrt{-1}$ の p-進類似は $\mathbb{C}_p$ の中には現れないということが分かる.

2.1. B_* **の構成に必要な様々な周期環の定義.** §2.1 では, B_{cris}, B_{st}, B_{dR} などの構成に必要な環 $\tilde{\mathbb{B}}^+$ などを定義する. まず, 完全環 (p 乗写像が同型となる標数 p の環)$\tilde{\mathbb{E}}^+$ を

$$\tilde{\mathbb{E}}^+ := \varprojlim_n \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/p := \{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/p \xleftarrow{p\,乗} \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/p \xleftarrow{p\,乗} \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/p \xleftarrow{p\,乗} \cdots\}$$

と定義する. $\tilde{\mathbb{E}}^+$ の元は, $x = (x_n)_{n\geqq 0}$, $(x_n \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/p,\ x_{n+1}^p = x_n)$ と書ける. $\bar{\mathbb{F}}_p = \mathcal{O}_{\mathbb{Q}_p^{\mathrm{ur}}}/p \xrightarrow{\sim} \varprojlim_n \mathcal{O}_{\mathbb{Q}_p^{\mathrm{ur}}}/p$ なので, 自然な埋め込み

$$\bar{\mathbb{F}}_p \hookrightarrow \tilde{\mathbb{E}}^+$$

がある. $\tilde{\mathbb{E}}^+$ の元 $x = (x_n)_{n\geqq 0}$ に対し $v(x) := \lim_{n\to\infty} v_p(\tilde{x}_n^{p^n})$ (ここで, $\tilde{x}_n \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ は x_n の任意の持ち上げ) と定めると, $v : \tilde{\mathbb{E}}^+ \to \mathbb{R}_{\geqq 0} \cup \{\infty\}$ は持ち上げ $\tilde{x}_n$ の取り方に依らず定義され, 付値の公理を満たすことが分かる. さらに, この付値 v により, $\tilde{\mathbb{E}}^+$ は完備な付値環となることが証明できる. $\tilde{\mathbb{E}}^+$ の重要な元として, 次の二つの元

$$\varepsilon,\ \tilde{p} \in \tilde{\mathbb{E}}^+$$

を固定する. $\varepsilon := (\bar{\varepsilon}_n)_{n\geqq 0}$ を, $\varepsilon_n \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$, $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_1 \neq 1$, $\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n$ (任意の n) を満たす元とする (ここで, $\bar{\varepsilon}_n \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/p$ は, ε_n の還元とする). $\tilde{p} := (\bar{p}_n)_{n\geqq 0}$ を, $p_n \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$, $p_0 = p$, $p_{n+1}^p = p_n$ (任意の n) を満たす元とする. $\tilde{\mathbb{E}}^+$ の p 乗写像 $x \mapsto x^p$ を φ と書き Frobenius と呼ぶことにする. $\tilde{\mathbb{E}}^+$ は, $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ への自然な G_K-作用から誘導される φ と可換な連続 G_K-作用をもつ (ここで, $\tilde{\mathbb{E}}^+$ には, 付置 v から定まる位相を考える).

$$\tilde{\mathbb{A}}^+ := W(\tilde{\mathbb{E}}^+)$$

を $\tilde{\mathbb{E}}^+$ の Witt 環とする. つまり, p が素元で p が非零因子となる p-進完備な環で $\tilde{\mathbb{A}}^+/p\tilde{\mathbb{A}}^+ \xrightarrow{\sim} \tilde{\mathbb{E}}^+$ となる (同型を除いて) 唯一の環とする. $\tilde{\mathbb{A}}^+$ には p-進位相の他に, 剰余環 $\tilde{\mathbb{E}}^+$ の v による位相も込めて定義する弱位相という位相を定義することができるが, 本稿では位相に関する詳しい解説は省略する. $[-] : \tilde{\mathbb{E}}^+ \to \tilde{\mathbb{A}}^+$ を Teichmüller 指標, つまり, $[0] = 0$, $[1] = 1$, 任意の $x, y \in \tilde{\mathbb{E}}^+$ に対し $[xy] = [x][y]$, $[x] \equiv x \in \tilde{\mathbb{E}}^+ \pmod p$ を満たす唯一の写像とする. すると, 任意の $x \in \tilde{\mathbb{A}}^+$ は $x = \sum_{n=0}^\infty [a_n]p^n$ $(a_n \in \tilde{\mathbb{E}}^+)$ と一意的に表示できる. Witt 環の普遍性から $\tilde{\mathbb{E}}^+$ の φ, G_K-作用は $\tilde{\mathbb{A}}^+$ 上の作用に自然に延長する (この作用は, p-進位相では連続な作用にならないが弱位相では連続な作用になる). 具体的に作用を書くと, $\varphi(\sum_{n=0}^\infty [a_n]p^n) = \sum_{n=0}^\infty [a_n^p]p^n$, $g(\sum_{n=0}^\infty [a_n]p^n) = \sum_{n=0}^\infty [g(a_n)]p^n (g \in G_K)$ と作用する.

$$\tilde{\mathbb{B}}^+ := \tilde{\mathbb{A}}^+[p^{-1}]$$

とおく. $\widehat{\mathbb{Q}}_p^{\mathrm{ur}} = W(\bar{\mathbb{F}}_p)[p^{-1}]$ なので,

$$\widehat{\mathbb{Q}}_p^{\mathrm{ur}} \subseteq \tilde{\mathbb{B}}^+$$

となる. この $\tilde{\mathbb{B}}^+$ は次の意味で, $\mathbb{C}_p$ よりも大きい環になっている. まず, 任意の元 $[x] = [(x_n)_{n\geqq 0}] \in \tilde{\mathbb{A}}^+ (x \in \tilde{\mathbb{E}}^+)$ に対し, $\theta([x]) := \lim_{n\to\infty} \tilde{x}_n^{p^n}$ と定める (ここで, $\tilde{x}_n \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ は, $x_n \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/p\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ の任意の持ち上げ). $\theta : \tilde{\mathbb{A}}^+ \to \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ を,

$$\theta : \tilde{\mathbb{A}}^+ \to \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p} : \sum_{n=0}^\infty [a_n]p^n \mapsto \sum_{n=0}^\infty \theta([a_n])p^n$$

と定めると, θ は環準同型になることが証明できる. θ は G_K-作用と両立する写像である. $\theta([x])$ の定義と $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ の完備性により, この θ は全射となっている. $[\tilde{p}] - p \in \mathrm{Ker}(\theta)$ であるが, 実は

$$\mathrm{Ker}(\theta) = ([\tilde{p}] - p)\tilde{\mathbb{A}}^+$$

となることが証明できる (これは, $\theta \pmod p$ の核が $\tilde{p}\tilde{\mathbb{E}}^+$ であることを確かめれば後は, $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ が p 捻れ元を持たないことから従う). θ は G_K-作用と両立するから $\mathrm{Ker}(\theta)$ は G_K-作用で閉じて

いるが, φ 作用では閉じていないことに注意 (例えば, $\varphi([\tilde{p}]-p) \notin \mathrm{Ker}(\theta)$ となる). p を可逆にして得られる全射

$$\theta : \tilde{\mathbb{B}}^{+} \to \mathbb{C}_p$$

も同様に θ と表す.

2.2. B_{dR}**:de Rham 表現.** $\tilde{\mathbb{B}}^{+}$ を用いて B_{dR}^{+} を,

$$B_{\mathrm{dR}}^{+} := \varprojlim_{n} \tilde{\mathbb{B}}^{+}/\mathrm{Ker}(\theta)^n$$

と定義する. 上で注意したことから, B_{dR}^{+} には自然に G_K が作用するが, φ は作用しないことに注意. $\theta : \tilde{\mathbb{B}}^{+} \to \mathbb{C}_p$ は G_K-作用と両立する全射

$$\theta : B_{\mathrm{dR}}^{+} \to \mathbb{C}_p$$

を誘導する. 自然な射 $\tilde{\mathbb{B}}^{+} \to B_{\mathrm{dR}}^{+}$ は単射であることが証明できる. 定義により, B_{dR}^{+} は剰余体 $\mathbb{C}_p$, 極大イデアル $\mathrm{Ker}(\theta)$ の完備離散付値環となることが証明できる. さらに, G_K-作用と両立する自然な埋め込み

$$\overline{K} \subset B_{\mathrm{dR}}^{+}$$

が存在することが証明できる ($\overline{K} \not\subset \tilde{\mathbb{B}}^{+}$ なので, これは自明な事実ではない).

$$t := \log([\varepsilon]) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{([\varepsilon]-1)^n}{n} \in B_{\mathrm{dR}}^{+}$$

と定義する ($([\varepsilon]-1) \in \mathrm{Ker}(\theta)$ なので, t は B_{dR}^{+} の元として収束する). $\log$ の形式的な性質を用いると (少し議論が必要であるが),

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \log(\varphi([\varepsilon])) = \log([\varepsilon]^p) \\ &= p\log([\varepsilon]) = pt, \\ g(t) &= \log(g([\varepsilon])) = \log([\varepsilon]^{\chi(g)}) \\ &= \chi(g)\log([\varepsilon]) = \chi(g)t \ \ (g \in G_K) \end{aligned}$$

を満たすことが証明できる (つまり, t は $\mathbb{Q}_p(-1)$ の p-進周期, つまり $2\pi\sqrt{-1}$ の p-進類似となる！). このとき, $\log([\varepsilon]) = ([\varepsilon]-1)x$ ($x \in B_{\mathrm{dR}}^{+}$), $\theta(x) \neq 0$ となることを用いると,

$$\mathrm{Ker}(\theta) = tB_{\mathrm{dR}}^{+}$$

となることが証明できる. B_{dR}^{+} の商体を,

$$B_{\mathrm{dR}} := B_{\mathrm{dR}}^{+}[t^{-1}]$$

とおく. B_{dR} に G_K-作用で閉じている B_{dR}^{+}-部分加群による減少フィルトレイションを

$$\mathrm{Fil}^i B_{\mathrm{dR}} := t^i B_{\mathrm{dR}}^{+} \ (i \in \mathbb{Z})$$

と定義する. この B_{dR} を用いて, Rep_{G_K} から K 上のフィルトレイション付き加群 (filtered modules over K) への関手 D_{dR} を定義したい. まずはそのために必要ないくつかの準備を行う.

Definition 2.3. D が K 上のフィルトレイション付き加群 (filtered module over K) であるとは, D は有限次元 K ベクトル空間で, 部分 K-ベクトル空間による減少フィルトレイション $\mathrm{Fil}^i D$ ($i \in \mathbb{Z}$) を持ち, 十分大きな $i > 0$ に対して $\mathrm{Fil}^i D = 0$, $\mathrm{Fil}^{-i} D = D$ を満たすもの, と定義する. フィルトレイション付き加群 D_1 から D_2 に対し, D_1 から D_2 への射を K-ベクトル空間の射 $f : D_1 \to D_2$ で任意の $i \in \mathbb{Z}$ に対し $f(\mathrm{Fil}^i D_1) \subseteq \mathrm{Fil}^i D_2$ を満たすものと定義する. K 上のフィルトレイション付き加群の圏を MF_K と表す.

Remark 2.4. MF_K はアーベル圏ではないことに注意. 例えば, $D_1 = Ke_1$, $\mathrm{Fil}^0 D_1 = D_1$, $\mathrm{Fil}^1 D_1 = 0$, $D_2 = Ke_2$, $\mathrm{Fil}^1 D_2 = D_2$, $\mathrm{Fil}^2 D_2 = 0$ に対し, 射 $f : D_1 \to D_2 : ae_1 \mapsto ae_2$ を考えれば $\mathrm{Im}(f) = D_1$ だが $\mathrm{Coim}(f) = D_2$ となる. そこで, MF_K の列

$$0 \to D_1 \to D_2 \to D_3 \to 0$$

が完全であることを, 任意の i に対し,

$$0 \to \mathrm{Fil}^i D_1 \to \mathrm{Fil}^i D_2 \to \mathrm{Fil}^i D_3 \to 0$$

が完全であること, と定義する.

Definition 2.5. Rep_{G_K} から MF_K への関手

$$D_{\mathrm{dR}} : \mathrm{Rep}_{G_K} \to MF_K$$

を任意の $V \in \mathrm{Rep}_{G_K}$ に対し,

$$D_{\mathrm{dR}}(V) := (B_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K},\ \mathrm{Fil}^i D_{\mathrm{dR}}(V) := (\mathrm{Fil}^i B_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K}$$

により定義する.

$D_{\mathrm{dR}}(V)$ が有限次元であることは, 次のより強い主張の命題から従う.

Proposition 2.6.
(1) $B_{\mathrm{dR}}^{G_K} = K$.
(2) 任意の $V \in \mathrm{Rep}_{G_K}$ に対し, 不等式

$$\dim_K D_{\mathrm{dR}}(V) \leqq \sum_{i \in \mathbb{Z}} \dim_K (\mathbb{C}_p(i) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K} \leqq \dim_{\mathbb{Q}_p} V$$

が成り立つ.

Proof. これらは, Tate の定理 (Theorem 2.2) と完全列

$$0 \to t^{k+1} B_{\mathrm{dR}}^+ \to t^k B_{\mathrm{dR}}^+ \to \mathbb{C}_p(k) \to 0$$

から従う. □

Definition 2.7.
(1) 等号

$$\dim_K D_{\mathrm{dR}}(V) = \dim_{\mathbb{Q}_p} V$$

が成り立つとき, V をドラーム表現 (de Rham representation) と呼ぶ. ドラーム表現から成る Rep_{G_K} の部分圏を $\mathrm{Rep}_{G_K,\mathrm{dR}}$ と表す.
(2) $V \in \mathrm{Rep}_{G_K,\mathrm{dR}}$ に対し, $\mathbb{Z}$ の有限部分集合

$$\{i \in \mathbb{Z} | \mathrm{Fil}^{-i} D_{\mathrm{dR}}(V)/\mathrm{Fil}^{-i+1} D_{\mathrm{dR}}(V) \neq 0\}$$

の元を V の Hodge-Tate 重み (Hodge-Tate weight) と呼ぶ.

上の命題の (2) を用いることにより, D_{dR} を $\mathrm{Rep}_{G_K,\mathrm{dR}}$ に制限すると次が成り立つ.

Proposition 2.8.
(0) $\mathrm{Rep}_{G_K,\mathrm{dR}}$ はアーベル圏 (つまり, $f : V_1 \to V_2$ で $V_1, V_2 \in \mathrm{Rep}_{G_K,\mathrm{dR}}$ なら $\mathrm{Ker}(f), \mathrm{Im}(f)$, $\mathrm{Coker}(f) \in \mathrm{Rep}_{G_K,\mathrm{dR}}$) となる.
(1) $D_{\mathrm{dR}} : \mathrm{Rep}_{G_K,\mathrm{dR}} \to MF_K$ は完全関手 (つまり, $\mathrm{Rep}_{G_K,\mathrm{dR}}$ の完全列を MF_K の完全列に移す).
(2) 任意の $V \in \mathrm{Rep}_{G_K,\mathrm{dR}}$ に対し, 自然な射

$$B_{\mathrm{dR}} \otimes_K (B_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V) \to B_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V : a \otimes (b \otimes x) \mapsto ab \otimes x$$

から誘導される射

$$B_{\mathrm{dR}} \otimes_K D_{\mathrm{dR}}(V) \to B_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$$

は, B_{dR}^+ 上のフィルトレイション付き G_K-加群として同型になる (ただし, 左辺のフィルトレイションは

$$\mathrm{Fil}^i(B_{\mathrm{dR}} \otimes_K D_{\mathrm{dR}}(V)) := \sum_{i_1+i_2=i} \mathrm{Fil}^{i_1} B_{\mathrm{dR}} \otimes_K \mathrm{Fil}^{i_2} D_{\mathrm{dR}}(V)$$

と定義し, 右辺のフィルトレイションは

$$\mathrm{Fil}^i(B_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V) := \mathrm{Fil}^i B_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$$

と定義する).

Remark 2.9. (Tate 捻りに対応するフィルトレイション付き加群)

任意の i に対し, $D_{\mathrm{dR}}(\mathbb{Q}_p(i)) = (B_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_p(i))^{G_K} = K(\frac{1}{t^i}e_i)$ となる (ここで, e_i は $\mathbb{Q}_p(i)$ の基底). よって, $\mathbb{Q}_p(i)$ はドラーム表現であり, $\mathrm{Fil}^{-i} D_{\mathrm{dR}}(\mathbb{Q}_p(i)) = D_{\mathrm{dR}}(\mathbb{Q}_p(i))$, $\mathrm{Fil}^{-i+1} D_{\mathrm{dR}}(\mathbb{Q}_p(i)) = 0$ となるので, $\mathbb{Q}_p(i)$ の Hodge-Tate 重みは i となる.

Remark 2.10. L を K の有限次ガロア拡大とする. $V \in \mathrm{Rep}_{G_K}$ に対し, $V \in \mathrm{Rep}_{G_K,\mathrm{dR}}$ ならば, V を G_L に制限した表現 $V|_{G_L}$ も再びドラームになる. 逆に, Hilbert の定理 90 ($\mathrm{H}^1(\mathrm{Gal}(L/K), \mathrm{GL}_n(L)) = \{1\}$) を用いると, $V|_{G_L}$ がドラームならば V もドラームとなることが証明できる.

2.3. B_{HT}**:Hodge-Tate 表現.** B_{HT} を,

$$B_{\mathrm{HT}} := \mathbb{C}_p[T, T^{-1}]$$

と定義し, G_K の作用を

$$g(\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n T^n) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} g(a_n)\chi(g)^n T^n \ (g \in G_K, \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n T^n \in B_{\mathrm{HT}})$$

と定義する. B_{HT} を用いて, Rep_{G_K} から有限次元次数付き K-ベクトル空間の圏 $M_{\mathrm{gr},K}$ への関手 D_{HT} を次のように定義する.

Definition 2.11. Rep_{G_K} から $M_{\mathrm{gr},K}$ への関手

$$D_{\mathrm{HT}} : \mathrm{Rep}_{G_K} \to M_{\mathrm{gr},K}$$

を,

$$D_{\mathrm{HT}}(V) := (B_{\mathrm{HT}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K},\ D_{\mathrm{HT}}(V)_i := (\mathbb{C}_p T^i \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K} \subseteq D_{\mathrm{HT}}(V)$$

と定義する.

Remark 2.12. 命題 2.6(2) により, 不等式

$$\dim_K D_{\mathrm{dR}}(V) \leqq \dim_K D_{\mathrm{HT}}(V) \leqq \dim_{\mathbb{Q}_p} V$$

が常に成り立つ.

Definition 2.13.

(1) $V \in \mathrm{Rep}_{G_K}$ が等号

$$\dim_K D_{\mathrm{HT}}(V) = \dim_{\mathbb{Q}_p} V$$

を満たすとき, V を Hodge-Tate 表現 (Hodge-Tate representation) と呼ぶ. Hodge-Tate 表現から成る Rep_{G_K} の部分圏を $\mathrm{Rep}_{G_K,\mathrm{HT}}$ と表す.

(2) $V \in \mathrm{Rep}_{G_K,\mathrm{HT}}$ に対し, $\mathbb{Z}$ の有限部分集合

$$\{i \in \mathbb{Z} | D_{\mathrm{HT}}(V)_{-i} \neq 0\}$$

の元を V の Hodge-Tate 重みと呼ぶ.

ドラーム表現の場合と同様に Tate の定理を用いることで, 次の命題を得る.

Proposition 2.14. $V \in \mathrm{Rep}_{G_K}$ に対し, 次の (1), (2) は同値.

(1) $V \in \mathrm{Rep}_{G_K,\mathrm{HT}}$.

(2) 自然な射

$$B_{\mathrm{HT}} \otimes_K (B_{\mathrm{HT}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V) \to B_{\mathrm{HT}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V : a \otimes (b \otimes x) \mapsto ab \otimes x$$

により誘導される射

$$B_{\mathrm{HT}} \otimes_K D_{\mathrm{HT}}(V) \to B_{\mathrm{HT}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$$

は, G_K-作用と両立する次数付き $\mathbb{C}_p$-ベクトル空間としての同型になる (ここで, 左辺の次数付けは,

$$(B_{\mathrm{HT}} \otimes_K D_{\mathrm{HT}}(V))_i := \bigoplus_{i_1+i_2=i} \mathbb{C}_p T^{i_1} \otimes_K D_{\mathrm{HT}}(V)_{i_2}$$

と定義し, 右辺の次数付けは

$$(B_{\mathrm{HT}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)_i := \mathbb{C}_p T^i \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$$

と定義する).

Definition 2.15. $V \in \mathrm{Rep}_{G_K,\mathrm{HT}}$ に対し, 上の (2) の同型の次数 0 部分を取ることで, 次数付き $\mathbb{C}_p[G_K]$-加群の同型

$$\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathbb{C}_p(i) \otimes_K D_{\mathrm{HT}}(V)_{-i} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}_p \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$$

を得る. これを, V の Hodge-Tate 分解 (Hodge-Tate decomposition) と呼ぶ.

Remark 2.16. $i \in \mathbb{Z}$ に対して, $\mathrm{H}^1(G_K, \mathbb{Q}_p(i))$ の非自明な元に対応する非自明な拡大 $0 \to \mathbb{Q}_p(i) \to V \to \mathbb{Q}_p \to 0$ を考える. $i \neq 0$ のとき, このような V は全て Hodge-Tate 表現である. (なぜなら, この完全列に $\mathbb{C}_p$ をテンソルすると完全列 $0 \to \mathbb{C}_p(i) \to \mathbb{C}_p \otimes_{\mathbb{Q}_p} V \to \mathbb{C}_p \to 0$ を得るが, Tate の定理により $i \neq 0$ のときこの完全列は $\mathbb{C}_p[G_K]$-加群として分解するから). $i = 0$ の時には, 例えば 1-コサイクル $\log(\chi) : G_K \to \mathbb{Q}_p : g \to \log(\chi(g))$ に対応する拡大 $[\log(\chi)] \in \mathrm{Hom}(G_K, \mathbb{Q}_p) = \mathrm{H}^1(G_K, \mathbb{Q}_p)$ は Hodge-Tate ではない (§4 参照).

次に, ドラーム表現と Hodge-Tate 表現の関係に関する次の命題を述べる. この命題は,

$$\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} t^i B_{\mathrm{dR}}^+ / t^{i+1} B_{\mathrm{dR}}^+ \xrightarrow{\sim} B_{\mathrm{HT}}$$

であることを用いると命題 2.6 (2) から従う.

Proposition 2.17.

(1) $\mathrm{Rep}_{G_K,\mathrm{dR}} \subseteq \mathrm{Rep}_{G_K,\mathrm{HT}}$.

(2) $V \in \mathrm{Rep}_{G_K,\mathrm{dR}}$ に対して, $D_{\mathrm{dR}}(V)$ の Hodge-Tate 重みと $D_{\mathrm{HT}}(V)$ の Hodge-Tate 重みは一致する. より強く, 次数付き K-ベクトル空間の自然な同型

$$\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{Fil}^i D_{\mathrm{dR}}(V) / \mathrm{Fil}^{i+1} D_{\mathrm{dR}}(V) \xrightarrow{\sim} D_{\mathrm{HT}}(V)$$

が存在する.

Remark 2.18. 逆の包含関係 $\mathrm{Rep}_{G_K,\mathrm{HT}} \subseteq \mathrm{Rep}_{G_K,\mathrm{dR}}$ は成り立たない. 例えば, 任意の $i \leqq -1$ に対し, Rep_{G_K} での任意の非自明な拡大 $0 \to \mathbb{Q}_p(i) \to V \to \mathbb{Q}_p \to 0$ をとると, V は Hodge-Tate であるがドラームではない.

Remark 2.19. Hodge-Tate 表現の一般化として, Hodge-Tate 表現ではない全ての p-進表現に対しても一般化 Hodge-Tate 重みという不変量を定義することが出来る. これについては, §4 参照.

2.4. B_{cris}:**クリスタリン表現.** A_{cris} を $\tilde{\mathbb{A}}^+$ の $\mathrm{Ker}(\theta)=([\tilde{p}]-p)$ による PD-envelope の p-進完備化とする. $\tilde{\mathbb{A}}^+$ の G_K-作用は自然に A_{cris} 上へ延長され, さらに $\varphi([\tilde{p}]-p)\equiv([\tilde{p}]-p)^p \pmod{p\tilde{\mathbb{A}}^+}$ であるから Frobenius φ も A_{cris} 上に一意に延長される. $([\tilde{p}]-p)\in\mathrm{Ker}(\theta)$ であるから, $\tilde{\mathbb{A}}^+$ の B_{dR}^+ への自然な埋め込みは G_K-作用と可換な射 $A_{\mathrm{cris}}\to B_{\mathrm{dR}}^+$ を誘導する. この射は単射となり, この埋め込みにより,

$$A_{\mathrm{cris}}=\{\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{([\tilde{p}]-p)^n}{n!}\in B_{\mathrm{dR}}^+|a_n\in\tilde{\mathbb{A}}^+,a_n\to 0(n\to\infty)\}$$

となることが証明できる (ここで, $a_n\to 0$ $(n\to\infty)$ は, $\tilde{\mathbb{A}}^+$ の p 進位相に関しての収束とする). $B_{\mathrm{cris}}^+:=A_{\mathrm{cris}}[p^{-1}]$ とおく. $t\in B_{\mathrm{dR}}^+$ は,

$$t=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{([\varepsilon]-1)^n}{n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}(n-1)!\frac{([\varepsilon]-1)^n}{n!}$$

なので, $t\in A_{\mathrm{cris}}$ となる. $B_{\mathrm{cris}}:=B_{\mathrm{cris}}^+[t^{-1}]$ と定義する. G_K, φ の t への作用から, B_{cris} は G_K, φ の作用で閉じていることが分かる. 単射 $B_{\mathrm{cris}}^+\hookrightarrow B_{\mathrm{dR}}^+$ から単射 $B_{\mathrm{cris}}\hookrightarrow B_{\mathrm{dR}}$ を得る, $\widehat{\mathbb{Q}}_p^{\mathrm{ur}}\subseteq\tilde{\mathbb{B}}^+$ であったから $\widehat{\mathbb{Q}}_p^{\mathrm{ur}}\subseteq B_{\mathrm{cris}}^+$ となる. B_{cris} と B_{dR} の関係について, さらに次のことが成り立つ.

Proposition 2.20.
(1) 自然な射

$$K\otimes_{K_0}B_{\mathrm{cris}}\to B_{\mathrm{dR}}$$

は単射.
(2) $B_{\mathrm{cris}}^{G_K}=K_0$.
(3) (Bloch-加藤の基本完全列) 次の G_K-加群の完全列

$$0\to\mathbb{Q}_p\to B_{\mathrm{cris}}^{\varphi=1}\oplus B_{\mathrm{dR}}^+\to B_{\mathrm{dR}}\to 0$$

が存在する. ただし,

$$B_{\mathrm{cris}}^{\varphi=1}:=\{x\in B_{\mathrm{cris}}|\varphi(x)=x\}$$

で, 射は $\mathbb{Q}_p\to B_{\mathrm{cris}}^{\varphi=1}\oplus B_{\mathrm{dR}}^+:x\mapsto(x,x)$, $B_{\mathrm{cris}}^{\varphi=1}\oplus B_{\mathrm{dR}}^+\to B_{\mathrm{dR}}:(x,y)\mapsto x-y$ で定義される.

Definition 2.21. $V\in\mathrm{Rep}_{G_K}$ に対し,

$$D_{\mathrm{cris}}(V):=(B_{\mathrm{cris}}\otimes_{\mathbb{Q}_p}V)^{G_K}$$

と定める. 上の命題 (1)(2) 及び命題 2.6 (2) より, 不等式

$$\dim_{K_0}D_{\mathrm{cris}}(V)\leqq\dim_K D_{\mathrm{dR}}(V)\leqq\dim_{\mathbb{Q}_p}V$$

が常に成り立つ.

Definition 2.22. D が K 上のフィルトレイション付き φ-加群 (filtered φ-module over K) であるとは, D は有限次元 K_0-ベクトル空間で, φ-線形な同型 $\varphi_D:D\xrightarrow{\sim}D$ を持ち (つまり, 任意の $a\in K_0$, $x\in D$ に対し, $\varphi_D(ax)=\varphi(a)\varphi_D(x)$ が成り立つ), $D_K:=K\otimes_{K_0}D$ はフィルトレイション付き K-ベクトル空間になっているもの, と定義する. K 上のフィルトレイション付き φ-加群の圏を MF_K^{φ} と表す.

Definition 2.23. $V\in\mathrm{Rep}_{G_K}$ が等号

$$\dim_{K_0}D_{\mathrm{cris}}(V)=\dim_{\mathbb{Q}_p}(V)$$

を満たすとき, V をクリスタリン表現と呼ぶ. クリスタリン表現から成る Rep_{G_K} の部分圏を $\mathrm{Rep}_{G_K,\mathrm{cris}}$ と表す.

Remark 2.24. クリスタリン表現 V に対し, $D_{\mathrm{cris}}(V)$ の Frobenius 作用 $\varphi_{D_{\mathrm{cris}}(V)}$ を B_{cris} の Frobenius から誘導される作用として定める. また, 不等式 $\dim_{K_0} D_{\mathrm{cris}}(V) \leqq \dim_K D_{\mathrm{dR}}(V)$ より, V がクリスタリン表現なら V はドラーム表現でさらに上の命題 (1) より自然な同型

$$K \otimes_{K_0} D_{\mathrm{cris}}(V) \xrightarrow{\sim} D_{\mathrm{dR}}(V)$$

を得る. これらにより, $D_{\mathrm{cris}}(V) \in MF_K^{\varphi}$ となる.

Proposition 2.25. $V \in \mathrm{Rep}_{G_K}$ に対し次は同値.

(1) $V \in \mathrm{Rep}_{G_K,\mathrm{cris}}$.

(2) 自然な射

$$B_{\mathrm{cris}} \otimes_{K_0} D_{\mathrm{cris}}(V) \to B_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$$

は G_K-作用, φ, フィルトレイションと両立する同型になる.

さらに, これらが成り立つとき, (G_K の作用も込めて) 自然な同型

$$(B_{\mathrm{cris}} \otimes_{K_0} D_{\mathrm{cris}}(V))^{\varphi=1} \cap \mathrm{Fil}^0(B_{\mathrm{dR}} \otimes_K D_{\mathrm{dR}}(V)) \xrightarrow{\sim} V$$

がある, つまり, V が $D_{\mathrm{cris}}(V)$ から復元できる. 特に, 関手

$$D_{\mathrm{cris}} : \mathrm{Rep}_{G_K,\mathrm{cris}} \to MF_K^{\varphi}$$

は忠実充満な完全関手となる.

Proof. (1) と (2) の同値性 (特に, (1) ならば (2) が成り立つこと) は, B_{cris} が体ではないので明らかではない. これは, 一次元クリスタリン表現が $\chi^i\mu : G_K \to \mathbb{Z}_p^{\times}$($i \in \mathbb{Z}$, μ は不分岐指標) と書けることから従う. 後半の主張は, Bloch-加藤の基本完全列より, $V \in \mathrm{Rep}_{G_K,\mathrm{cris}}$ に対し,

$$\begin{aligned}(B_{\mathrm{cris}} \otimes_{K_0} D_{\mathrm{cris}}(V))^{\varphi=1} \cap \mathrm{Fil}^0(B_{\mathrm{dR}} \otimes_K D_{\mathrm{dR}}(V)) &= (B_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{\varphi=1} \cap \mathrm{Fil}^0(B_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V) \\ &= (B_{\mathrm{cris}}^{\varphi=1} \cap B_{\mathrm{dR}}^+) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V \\ &= V\end{aligned}$$

となることから従う. □

Remark 2.26. D_{cris} の essential image に関しては, §2.7 を参照.

Remark 2.27. $\mathbb{Q}_p(i)$ は, クリスタリン表現である. 実際, $t \in B_{\mathrm{cris}}$ なので, $D_{\mathrm{cris}}(\mathbb{Q}_p(i)) = (B_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_p(i))^{G_K} = K_0(\frac{1}{t^i}e_i)$ となり, $\varphi(\frac{1}{t^i}e_i) = \frac{1}{p^i}(\frac{1}{t^i}e_i)$, $\mathrm{Fil}^{-i}D_{\mathrm{dR}}(\mathbb{Q}_p(i)) = D_{\mathrm{dR}}(\mathbb{Q}_p(i))$, $\mathrm{Fil}^{-i+1}D_{\mathrm{dR}}(\mathbb{Q}_p(i)) = 0$ となる.

Remark 2.28. ここでは, $\mathrm{H}^1(G_K, \mathbb{Q}_p(1))$ の元に対応する拡大類でクリスタリン表現となるものについて考えたい. G_K-加群の完全列 $1 \to \mu_{p^n} \to \overline{K}^{\times} \xrightarrow{x \mapsto x^p} \overline{K}^{\times} \to 1$ (ここで, $\mu_{p^n} := \{\zeta \in \overline{K}^{\times} | \zeta^{p^n} = 1\}$ とする) の境界準同型の n に関する射影極限 $\varprojlim_n K^{\times}/(K^{\times})^{p^n} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1(G_K, \mathbb{Z}_p(1))$ と自然な射 $K^{\times} \to \varprojlim_n K^{\times}/(K^{\times})^{p^n}$, $\mathrm{H}^1(G_K, \mathbb{Z}_p(1)) \to \mathrm{H}^1(G_K, \mathbb{Q}_p(1))$ との合成 $K^{\times} \to \mathrm{H}^1(G_K, \mathbb{Q}_p(1)) : a \mapsto [V_a]$ を考える. このとき, $a \in \mathcal{O}_K^{\times}$ ならば対応する拡大 $0 \to \mathbb{Q}_p(1) \to V_a \to \mathbb{Q}_p \to 0$ の V_a はクリスタリン表現になる. $i \geqq 2$ の場合は, 任意の $\mathrm{H}^1(G_K, \mathbb{Q}_p(i))$ の元に対応する拡大がクリスタリン表現になる.

2.5. B_{st}**:準安定表現.** ここでは, K の素元 π_K を一つ選び, $\tilde{\pi} := (\bar{\pi}_n) \in \tilde{\mathbb{E}}^+$ を $\pi_n \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$, $\pi_0 = \pi_K$, $\pi_{n+1}^p = \pi_n$ となるように取る. $\tilde{\pi}$ に対し,

$$\log([\tilde{\pi}]) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(\frac{[\tilde{\pi}]}{\pi_K} - 1)^n \in tB_{\mathrm{dR}}^+$$

と定義する. すると, t の場合と同様にして (少し議論をすると)

$$\begin{aligned}\varphi(\log([\tilde{\pi}]) &= p\log([\tilde{\pi}]), \\ g(\log([\tilde{\pi}]) &= \log(g[\tilde{\pi}]) = \log([\tilde{\pi}][\varepsilon]^{c_{\pi_K}(g)}) \\ &= \log([\tilde{\pi}]) + c_{\pi_K}(g)t\end{aligned}$$

となることが証明できる．ただし, $c_{\pi_K}: G_K \to \mathbb{Z}_p(1)$ は, $g(\pi_n) = \pi_n \varepsilon_n^{c_{\pi_K}(g)}$ (任意の n) と定義される 1-コサイクルとする．B_{st} を

$$B_{\mathrm{st}} := B_{\mathrm{cris}}[\log([\tilde{\pi}])] \subseteq B_{\mathrm{dR}}$$

と定義する． $\log([\tilde{\pi}])$ は, B_{cris} 上超越的であることが知られている, つまり環として $B_{\mathrm{st}} = B_{\mathrm{cris}}[\log([\tilde{\pi}])] \xrightarrow{\sim} B_{\mathrm{cris}}[T]$ (B_{cris} 係数の一変数多項式環) と同型になる．$\log([\tilde{\pi}])$ への φ , G_K の作用の定義により B_{st} には自然に G_K, φ が作用する．B_{st} は π_K の選び方にはよるが $\tilde{\pi}$ の取り方には依らない．B_{st} の B_{cris} 上の derivation N を

$$N : B_{\mathrm{st}} \to B_{\mathrm{st}} : \sum_{i=0}^{n} a_i \log([\tilde{\pi}])^i \mapsto \sum_{i=0}^{n} i a_i \log([\tilde{\pi}])^{i-1} \ (a_i \in B_{\mathrm{cris}})$$

と定義し, この N をモノドロミー作用素と呼ぶ．定義より,

$$p\varphi N = N\varphi$$

が成り立つ．

Definition 2.29. D が K 上のフィルトレイション付き (φ, N)-加群 (filtered (φ, N)-module over K) であるとは, D が K 上のフィルトレイション付き φ-加群で, $p\varphi_D N_D = N_D \varphi_D$ を満たす K_0-線形な作用素 $N_D : D \to D$ を持つものとする．条件 $p\varphi_D N_D = N_D \varphi_D$ により, N_D はべき零な作用素になることが分かる．K 上のフィルトレイション付き (φ, N)-加群の圏を $MF_K^{\varphi,N}$ と表す．K 上のフィルトレイション付き φ-加群は $N = 0$ であるフィルトレイション付き (φ, N)-加群と思えるがこれにより MF_K^{φ} を $MF_K^{\varphi,N}$ の部分圏とみなす．

Proposition 2.30. B_{st} に関して次が成り立つ．

(1) $B_{\mathrm{st}}^{G_K} = K_0$.

(2) 自然な射

$$K \otimes_{K_0} B_{\mathrm{st}} \to B_{\mathrm{dR}}$$

は単射．

(3) $B_{\mathrm{st}}^{N=0} = B_{\mathrm{cris}}$, 特に, $B_{\mathrm{st}}^{\varphi=1, N=0} \cap B_{\mathrm{dR}}^{+} = \mathbb{Q}_p$ となる．

Remark 2.31. 上の命題により, 任意の $V \in \mathrm{Rep}_{G_K}$ に対して,

$$D_{\mathrm{st}}(V) := (B_{\mathrm{st}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K}$$

と定義すると, 不等式

$$\dim_{K_0} D_{\mathrm{st}}(V) \leqq \dim_K D_{\mathrm{dR}}(V) \leqq \dim_{\mathbb{Q}_p} V$$

が常に成り立つ．

Definition 2.32. $V \in \mathrm{Rep}_{G_K}$ で等式

$$\dim_{K_0} D_{\mathrm{st}}(V) = \dim_{\mathbb{Q}_p}(V)$$

を満たすものを準安定表現 (semi-stable representation) と呼ぶ．準安定表現からなる Rep_{G_K} の部分圏を $\mathrm{Rep}_{G_K, \mathrm{st}}$ と表す．

Remark 2.33.

(1) $B_{\mathrm{cris}} \subseteq B_{\mathrm{st}}$ であることと上の命題 (2) により包含関係

$$\mathrm{Rep}_{G_K, \mathrm{cris}} \subseteq \mathrm{Rep}_{G_K, \mathrm{st}} \subseteq \mathrm{Rep}_{G_K, \mathrm{dR}}$$

が成り立つ．

(2) $V \in \mathrm{Rep}_{G_K}$ に対し, B_{st} の φ, N と B_{dR} のフィルトレイションにより $D_{\mathrm{st}}(V)$ にもそれらの構造が誘導される．これにより, $D_{\mathrm{st}}(V) \in MF_K^{\varphi,N}$ となる．

Proposition 2.34. $V \in \mathrm{Rep}_{G_K}$ に対し次は同値．

(1) $V \in \mathrm{Rep}_{G_K, \mathrm{st}}$.

(2) 自然な射

$$B_{\mathrm{st}} \otimes_{K_0} D_{\mathrm{st}}(V) \to B_{\mathrm{st}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$$

は G_K, φ, N, フィルトレイションと両立する同型になる.

さらに, これらが成り立つとき, (G_K-作用を込めた) 自然な同型

$$(B_{\mathrm{st}} \otimes_{K_0} D_{\mathrm{st}})^{\varphi=1,N=0} \cap \mathrm{Fil}^0(B_{\mathrm{dR}} \otimes_K D_{\mathrm{dR}}(V)) \xrightarrow{\sim} V$$

がある. 特に,

$$D_{\mathrm{st}} : \mathrm{Rep}_{G_K,\mathrm{st}} \to MF_K^{\varphi,N}$$

は充満忠実な完全関手になる.

Proof. 証明は, D_{cris} の場合と同様. □

Remark 2.35. 例 2.28 で定義した射 $K^\times \to \mathrm{H}^1(G_K, \mathbb{Q}_p(1))$ において, $a \in K^\times \setminus \mathcal{O}_K^\times$ の像により定まる拡大類 V_a はクリスタリン表現ではないが, 準安定表現になる ($v_p(a) > 0$ のとき, V_a は Tate 曲線 $\overline{K}^\times/a^{\mathbb{Z}}$ の p-進 Tate 加群となる).

2.6. 潜在的クリスタリン, 潜在的準安定表現.

Definition 2.36. L を K の有限次ガロア拡大とする. D が次の (1), (2) の構造を持つとき, K 上のフィルトレイション付き $(\varphi, N, \mathrm{Gal}(L/K))$-加群 (filtered $(\varphi, N, \mathrm{Gal}(L/K))$-module over K) であるという.

(1) D は L 上のフィルトレイション付き (φ, N) 加群.
(2) 群準同型 $\mathrm{Gal}(L/K) \to \mathrm{Aut}_{MF_L^{\varphi,N}}(D)$ を持つ.

D がフィルトレイション付き $(\varphi, N, \mathrm{Gal}(L/K))$-加群で $N = 0$ のとき, D をフィルトレイション付き $(\varphi, \mathrm{Gal}(L/K))$-加群と呼ぶ. フィルトレイション付き $(\varphi, N, \mathrm{Gal}(L/K))$(または, $(\varphi, \mathrm{Gal}(L/K))$)-加群の圏を $MF_K^{\varphi,N,\mathrm{Gal}(L/K)}$ (または, $MF_K^{\varphi,\mathrm{Gal}(L/K)}$) と表す.

Definition 2.37. $V \in \mathrm{Rep}_{G_K}$ に対して, K のある有限次ガロア拡大 L が存在して, V の G_L への制限 $V|_{G_L}$ がクリスタリン表現 (または準安定表現) になるとき, V を潜在的クリスタリン表現 (または, 潜在的準安定表現) と呼ぶ. 潜在的クリスタリン表現 (または, 潜在的準安定表現) からなる Rep_{G_K} の部分圏を $\mathrm{Rep}_{G_K,\mathrm{pcris}}$(または, $\mathrm{Rep}_{G_K,\mathrm{pst}}$) と表す. より正確に, $V|_{G_L}$ がクリスタリン表現 (または準安定表現) となる表現からなる Rep_{G_K} の部分圏を $\mathrm{Rep}_{G_K,L-\mathrm{pcris}}$(または, $\mathrm{Rep}_{G_K,L-\mathrm{pst}}$) と表す.

Remark 2.38.

(1) Remark 2.10 より, 潜在的ドラーム表現はドラーム表現であったから, 包含関係

$$\mathrm{Rep}_{G_K,\mathrm{pcris}} \subseteq \mathrm{Rep}_{G_K,\mathrm{pst}} \subseteq \mathrm{Rep}_{G_K,\mathrm{dR}}$$

が成り立つ (実は, 等号 $\mathrm{Rep}_{G_K,\mathrm{pst}} = \mathrm{Rep}_{G_K,\mathrm{dR}}$ が成り立つ (後述する p-進局所モノドロミー定理)).

(2) $V \in \mathrm{Rep}_{G_K,L-\mathrm{pst}}$ に対し,

$$D_{\mathrm{st}}^L(V) := (B_{\mathrm{st}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_L}$$

とおくと, 定義により $\dim_{L_0} D_{\mathrm{st}}^L(V) = \dim_{\mathbb{Q}_p} V$ が成り立つ. D_{st}^L には, B_{st} や B_{dR} の G_K, φ, N, フィルトレイションからそれらが自然に誘導され, これにより $D_{\mathrm{st}}^L(V) \in MF_K^{\varphi,N,\mathrm{Gal}(L/K)}$ となる ($V \in \mathrm{Rep}_{G_K,L-\mathrm{pcris}}$ の場合は, $D_{\mathrm{cris}}^L(V) := (B_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_L} \in MF_K^{\varphi,\mathrm{Gal}(L/K)}$ となる).

準安定表現, クリスタリン表現の場合と同様に次の命題が成立する.

Proposition 2.39. L を K の有限次ガロア拡大とする. $V \in \mathrm{Rep}_{G_K}$ に対して, 次の条件 (1), (2) は同値.

(1) $V \in \mathrm{Rep}_{G_K,L-\mathrm{pst}}$(または, $V \in \mathrm{Rep}_{G_K,L-\mathrm{pcris}}$).

(2) 自然な射

$$B_{\mathrm{st}} \otimes_{L_0} D_{\mathrm{st}}^L(V) \to B_{\mathrm{st}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$$

(または,

$$B_{\mathrm{cris}} \otimes_{L_0} D_{\mathrm{cris}}^L(V) \to B_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)$$

は同型.

この命題の条件 (2) を用いることで次の命題を得る.

Proposition 2.40. L を K の有限次ガロア拡大とする. 関手

$$D_{\mathrm{cris}}^L : \mathrm{Rep}_{G_K, L-\mathrm{pcris}} \to MF_K^{\varphi, \mathrm{Gal}(L/K)} : V \mapsto D_{\mathrm{cris}}^L(V)$$

(または,

$$D_{\mathrm{st}}^L : \mathrm{Rep}_{G_K, L-\mathrm{pst}} \to MF_K^{\varphi, N, \mathrm{Gal}(L/K)} : V \mapsto D_{\mathrm{st}}^L(V))$$

は充満忠実完全関手となる.

Remark 2.41. これの essential image についても §2.7 を参照.

潜在的準安定表現とドラーム表現との関係において最も重要で深い定理は, 次の p-進局所モノドロミー定理である.

Theorem 2.42. (Berger[Be02], Colmez[Co08])
ドラーム表現は潜在的準安定表現になる. つまり, 等号

$$\mathrm{Rep}_{G_K, \mathrm{pst}} = \mathrm{Rep}_{G_K, \mathrm{dR}}$$

が成り立つ.

Remark 2.43. Berger([Be02]) は, (φ, Γ) 加群の理論を用いて, p-進表現に関するこの定理を Robba 環上の p-進微分方程式に関する Crew-都築予想に帰着することで証明した. Crew-都築予想は, ほぼ同時期に André([An04]), Christol-Mebkhout([Me02]), Kedlaya([Ke04]) によりそれぞれ独立な手法で証明された. なお現在では, Colmez([Co08]) による「Espaces Vectoriels de dimension finie」の理論を用いた (Crew-都築予想に帰着させない) 別証明も存在する.

2.7. 弱許容フィルトレイション付き (φ, N) 加群.

§2.7 では, D_{cris}, D_{st} らの essential imege について解説する.

L を K の有限次ガロア拡大とし, $D \in MF_K^{\varphi, N, \mathrm{Gal}(L/K)}$ とする. このとき, D に付随する二つの不変量 $t_N(D)$, $t_H(D)$ をそれぞれ次のように定義する. まず, $\dim_{L_0} D = 1$ で $D = L_0 e$ と書けるとき, $t_N(D) := v_p(\alpha) \in \mathbb{Z}$(ここで, $\alpha \in L_0^\times$ は, $\varphi(e) = \alpha e$ で定まる数), $t_H(D) \in \mathbb{Z}$ を $\mathrm{Fil}^{t_H(D)}(L \otimes_{L_0} D) \neq 0$ かつ $\mathrm{Fil}^{t_H(D)+1}(L \otimes_{L_0} D) = 0$ となる数と定義する. 一般の場合, $\dim_{L_0} D = d$ とするとき, D の d-次外積 $\wedge^d D$ は一次元になるが, $t_N(D) := t_N(\wedge^d D)$, $t_H(D) := t_H(\wedge^d D)$ と定義する. $t_H(D) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \dim_L(\mathrm{Fil}^i(L \otimes_{L_0} D)/\mathrm{Fil}^{i+1}(L \otimes_{L_0} D))$ となっている.

Definition 2.44. $D \in MF_K^{\varphi, N, \mathrm{Gal}(L/K)}$(または, $D \in MF_K^{\varphi, \mathrm{Gal}(L/K)}$) が次の条件 (1), (2) を満たすとき, 弱許容 (weakly-admissible) フィルトレイション付き $(\varphi, N, \mathrm{Gal}(L/K))$ 加群 (または, 弱許容フィルトレイション付き $(\varphi, \mathrm{Gal}(L/K))$ 加群) と呼ぶ.

(1) 等号

$$t_N(D) = t_H(D)$$

が成り立つ.

(2) D の任意の部分フィルトレイション付き $(\varphi, N, \mathrm{Gal}(L/K))$-加群 D' に対して不等式

$$t_N(D') \geqq t_H(D')$$

が成り立つ.

弱許容な対象からなる部分圏を $MF_K^{\varphi, N, \mathrm{Gal}(L/K), wa}$, $MF_K^{\varphi, \mathrm{Gal}(L/K), wa}$ と表す.

Proposition 2.45.

(1) $MF_K^{\varphi,N,\mathrm{Gal}(L/K),wa}$, $MF_K^{\varphi,N,\mathrm{Gal}(L/K),wa}$ はアーベル圏となる.
(2) $V \in \mathrm{Rep}_{G_K,L-\mathrm{pst}}$ に対して, $D_{\mathrm{st}}^L(V)$ は弱許容になる.

Proof. (2) だけ証明する. $V \in \mathrm{Rep}_{G_K,L-\mathrm{pst}}$ とする. まず, $t_N(V) = t_H(V)$ であることは, 「一次元潜在的準安定表現」$= \{\chi^k\delta | k \in \mathbb{Z}, \delta : G_K \to \mathbb{Z}_p^\times$: 潜在的不分岐指標 $\}$ となることから従う. 任意の部分対象 $D' \subseteq D_{\mathrm{st}}^L(V)$ に対して, $t_N(D') \geqq t_H(D')$ となることを示す. まず, $\dim_{L_0} D' = d'$ とすると, $D_{\mathrm{st}}^L : \mathrm{Rep}_{G_K,L-\mathrm{st}} \to MF_K^{\varphi,N,\mathrm{Gal}(L/K)}$ が完全でテンソル積と可換であることにより, $\wedge^{d'} D' \subseteq D_{\mathrm{st}}^L(\wedge^{d'} V)$ となるから, $\dim_{L_0} D' = 1$ の場合に証明すればよい. 以下, $\dim_{L_0} D' = 1$ の場合に $t_N(D') \geqq t_H(D')$ となることを証明する. そこで, $D' = L_0 e \subseteq D$ を $\varphi(e) = \alpha e$ $(\alpha \in L_0^\times)$, $\mathrm{Fil}^h(L \otimes_{L_0} D') = L \otimes_{L_0} D'$, $\mathrm{Fil}^{h+1}(L \otimes_{L_0} D') =$ とする. このとき, $(B_{\mathrm{st}} \otimes_{L_0} D')^{\varphi=1,N=0} \cap \mathrm{Fil}^0(B_{\mathrm{dR}} \otimes_L L \otimes_{L_0} D') \subseteq (B_{\mathrm{st}} \otimes_{L_0} D_{\mathrm{st}}^L(V))^{\varphi=1,N=0} \cap \mathrm{Fil}^0(B_{\mathrm{dR}} \otimes_L L \otimes_{L_0} D_{\mathrm{st}}^L(V)) = V$ が成り立ち, D' の定義から $B_{\mathrm{cris}}^{\varphi=\alpha^{-1}} \cap t^{-h} B_{\mathrm{dR}}^+ \subseteq V$ が成り立つ. 特に左辺は有限次元となる. ここで, $\alpha = p^i u$ $(u \in \mathcal{O}_{L_0}^\times)$ とおくと, $B_{\mathrm{cris}}^{\varphi=\alpha^{-1}} = B_{\mathrm{cris}}^{\varphi=p^{-i}}$ であるから, 左辺は t^h をかけると, $B_{\mathrm{cris}}^{\varphi=p^{h-i}} \cap B_{\mathrm{dR}}^+$ と同型になる. よって, 次の補題によりこれは $h > i$ のとき無限次元なので, $i \geqq h$ つまり $t_N(D') \geqq t_H(D')$ でなければならない. □

Lemma 2.46.
(1) $k < 0$ のとき, $B_{\mathrm{cris}}^{\varphi=p^k} \cap B_{\mathrm{dR}}^+ = 0$.
(2) $k = 0$ のとき, $B_{\mathrm{cris}}^{\varphi=1} \cap B_{\mathrm{dR}}^+ = \mathbb{Q}_p$.
(3) $k > 0$ のとき, $B_{\mathrm{cris}}^{\varphi=p^k} \cap B_{\mathrm{dR}}^+$ は無限次元 $\mathbb{Q}_p$-ベクトル空間となる.

Proof. $k \leqq 0$ のときは, $B_{\mathrm{cris}}^{\varphi=p^k} \cap B_{\mathrm{dR}}^+$ に t^{-k} をかけると $B_{\mathrm{cris}}^{\varphi=1} \cap t^{-k} B_{\mathrm{dR}}^+$ となるので, $B_{\mathrm{cris}}^{\varphi=1} \cap B_{\mathrm{dR}}^+ = \mathbb{Q}_p$ であることから従う. $k \geqq 1$ の場合は, 完全列

$$0 \to \mathbb{Q}_p t \to B_{\mathrm{cris}}^{+,\varphi=p} \to \mathbb{C}_p \to 0$$

が存在することから従う. □

実は, この命題の逆の主張が成り立つが証明ははるかに難しい.

Theorem 2.47. 関手

$$D_{\mathrm{st}}^L : \mathrm{Rep}_{G_K,L-\mathrm{pst}} \to MF_K^{\varphi,N,\mathrm{Gal}(L/K),wa}$$

および,

$$D_{\mathrm{cris}}^L : \mathrm{Rep}_{G_K,L-\mathrm{cris}} \to MF_K^{\varphi,\mathrm{Gal}(L/K),wa}$$

はそれぞれ圏同値を与える.

Remark 2.48. この定理は, 最初 Colmez-Fontaine([CF00]) により証明され, 後に Fontaine([Fo 03]) は「almost $\mathbb{C}_p$-表現」の一般論を用いて, Colmez([Co02]) は「Espaces Vectoriels de dimension finie」の一般論を用いてそれぞれ独立に証明した. 上の命題の証明で現れた $B_{\mathrm{cris}}^{\varphi=p^k} \cap B_{\mathrm{dR}}^+$ などの無限次元の連続 G_K-表現をより精密に調べることが, 彼らの証明では最も重要であり, 「almost $\mathbb{C}_p$-表現」や「Espaces Vectoriels de dimension finie」はそのような無限次元の G_K-表現を調べるための理論である. 一方現在では, (φ, Γ) 加群の理論を用いてこの定理を Robba 環上の p-進微分方程式の重要な定理, Kedlaya のスロープフィルトレイション定理 ([Ke04]) に帰着させる証明方法もある (Berger([Be08]) または Kisin([Ki06])).

3. 比較同型.

§3 では, K 上の代数多様体 X_K の p-進エタールコホモロジーとドラームコホモロジー, 及び特殊ファイバー X_k の (ログ) クリスタリンコホモロジーとの比較同型を §2 で解説した p-進表現の分類理論の用語を用いて解説したい. なお, 筆者の能力不足により, この章に関しては定理の主張を述べることしかできないことをまず最初にお断りしておく. この章の定理の証明の概略, 歴史などについては辻雄氏によるサーベイ ([Tsu02]) があるので, より詳しく勉強したい方はそれを読むことを強くお薦めする.

X を $\mathcal{O}_K$ 上の準安定還元を持つ固有スキーム (つまり, エタール局所的に $X \xrightarrow{\sim} \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K[T_1, T_2, \cdots, T_n]/(T_1T_2\cdots T_m - \pi_K))$ $(1 \leqq m \leqq n)$ となっているような固有スキーム) とする. このとき, X の生成ファイバー X_K は固有スムースになる. $X_{\overline{K}} := X_K \times_{\mathrm{Spec}(K)} \mathrm{Spec}(\overline{K})$ とする. 任意の $i \geqq 0$ に対し, p-進エタールコホモロジー $\mathrm{H}^i_{ét}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)$ とドラームコホモロジー

$$\mathrm{H}^i_{\mathrm{dR}}(X_K/K) := \mathbb{H}^i(X_K, \Omega^\bullet_{X_K/K})$$

が定まる. $\mathrm{H}^i_{ét}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p) \in \mathrm{Rep}_{G_K}$ となり, $\mathrm{H}^i_{\mathrm{dR}}(X_K/K)$ は $k \geqq 0$ に対し

$$\mathrm{Fil}^k\mathrm{H}^i_{\mathrm{dR}}(X_K/K) := \mathrm{Im}(\mathbb{H}^i(X_K, \Omega^{\geqq k}_{X_K/K}) \to \mathbb{H}^i(X_K, \Omega^\bullet_{X_K/K}))$$

と定義することで $\mathrm{H}^i_{\mathrm{dR}}(X_K/K) \in MF_K$ となる. 一方, X の特殊ファイバー $X_k := X \times_{\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)} \mathrm{Spec}(k)$ に対しては, ログクリスタリンコホモロジー

$$\mathrm{H}^i_{\log-\mathrm{cris}}(X) := \mathrm{H}^i_{\log-\mathrm{cris}}(X_k/\mathcal{O}_{K_0}) \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} K_0$$

が定まる ([BerO73], [HyKa94]). これは有限次元 K_0-ベクトル空間で φ-線形な Frobenius 作用 φ と K_0-線形なモノドロミー作用素 N が作用し, $N\varphi = p\varphi N$ を満たす. また, X がよい還元を持つ場合 (X_k がスムースになる場合) は $N = 0$ となる. これらに関して, まずは次が成り立つ.

Theorem 3.1. (Berthelot-Ogus, 兵藤-加藤) *以下, 素元 $\pi_K \in \mathcal{O}_K$ を固定する. このとき, 関手的な同型*

$$K \otimes_{K_0} \mathrm{H}^i_{\log-\mathrm{cris}}(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^i_{\mathrm{dR}}(X_K/K)$$

が存在する.

Proof. この定理は, X がよい還元を持つ場合は Berthelot-Ogus([BerO78]) により, 一般の場合は兵藤-加藤 ([HyKa94]) によって証明された. □

これにより, $\mathrm{H}^i_{\log-\mathrm{cris}}(X)$ に K 上のフィルトレイション付き (φ, N)-加群の構造 (X がよい還元をもつ場合は, フィルトレイション付き φ-加群の構造) が定義される. 次が, 比較同型の主定理である.

Theorem 3.2. *次の, 関手的で G_K-作用, φ, N, フィルトレイション と両立する同型が存在する.*

(1) X がよい還元を持つ場合は,

$$B_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathrm{H}^i_{ét}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p) \xrightarrow{\sim} B_{\mathrm{cris}} \otimes_{K_0} \mathrm{H}^i_{\log-\mathrm{cris}}(X).$$

(2) X が準安定還元を持つ場合は,

$$B_{\mathrm{st}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathrm{H}^i_{ét}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p) \xrightarrow{\sim} B_{\mathrm{st}} \otimes_{K_0} \mathrm{H}^i_{\log-\mathrm{cris}}(X).$$

ここで, 左辺の作用などは

$$g \otimes g,\ \varphi \otimes 1,\ N \otimes 1,\ \mathrm{Fil}^k \otimes \mathrm{H}^i_{ét}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)$$

と定め, 右辺は

$$g \otimes 1,\ \varphi \otimes \varphi,\ N \otimes 1 + 1 \otimes N,\ \mathrm{Fil}^k = \sum_{k_1+k_2=k} \mathrm{Fil}^{k_1} \otimes \mathrm{Fil}^{k_2}$$

と定義する. 特に,

$$\mathrm{H}^i_{ét}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p) \in \mathrm{Rep}_{G_K,\mathrm{st}}$$

(X がよい還元を持つ場合は

$$\mathrm{H}^i_{ét}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p) \in \mathrm{Rep}_{G_K,\mathrm{cris}})$$

となり, フィルトレイション付き (φ, N)-加群の同型

$$D_{\mathrm{st}}(\mathrm{H}^i_{ét}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^i_{\log-\mathrm{cris}}(X)$$

(X がよい還元を持つ場合はフィルトレイション付き φ-加群の同型

$$D_{\mathrm{cris}}(\mathrm{H}^i_{\acute{e}t}(X_{\overline{K}},\mathbb{Q}_p)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^i_{\mathrm{log-cris}}(X))$$

が成り立つ.

Proof. この定理の証明, 及び証明に関する歴史に関しては, 辻雄氏のサーベイ ([Tsu02]]) を参照. 準安定な場合の最終的な証明は Faltings(almost étale 理論による証明 [Fa02]), Niziol(K 理論による証明 [Ni98]), 辻雄氏 (サントミックコホモロジーによる証明 [Tsu99]) により独立な方法で行われた.

□

この定理と, de Jong のオルタレイションを用いることで, 次のことが証明出来る.

Theorem 3.3. X_K を K 上固有スムースな任意の代数多様体とする. このとき次が成り立つ.

(1) $\mathrm{H}^i_{\acute{e}t}(X_{\overline{K}},\mathbb{Q}_p)$ はドラーム表現であり, さらに関手的なフィルトレイション付き加群の同型

$$D_{\mathrm{dR}}(\mathrm{H}^i_{\acute{e}t}(X_{\overline{K}},\mathbb{Q}_p)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^i_{\mathrm{dR}}(X_K/K)$$

が存在する.

(2) $\mathrm{H}^i_{\acute{e}t}(X_{\overline{K}},\mathbb{Q}_p)$ は Hodge-Tate 表現であり, 関手的な同型

$$\mathbb{C}_p \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathrm{H}^i_{\acute{e}t}(X_{\overline{K}},\mathbb{Q}_p) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{n\geqq 0} \mathbb{C}_p(-n)\otimes_K \mathrm{H}^{i-n}(X_K,\Omega^n_{X_K/K})$$

が存在する.

以上の定理により, §2 と §3 の目標であった, X_K の幾何的性質と $\mathrm{H}^i_{\acute{e}t}(X_{\overline{K}},\mathbb{Q}_p)$ の p-進表現論的な性質の間に次のような対応関係があることが分かった.

$$\left\{\begin{array}{l}\text{良い}\\ \text{還元}\end{array}\right\} \subset \left\{\begin{array}{l}\text{準安定}\\ \text{還元}\end{array}\right\} \subset \left\{\begin{array}{l}\text{潜在的}\\ \text{準安定還元}\end{array}\right\} \subset \left\{\begin{array}{l}\text{すべての}\\ \text{代数多様体}\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{クリスタリン}\\ \text{表現}\end{array}\right\} \subset \left\{\begin{array}{l}\text{準安定}\\ \text{表現}\end{array}\right\} \subset \left\{\begin{array}{l}\text{潜在的}\\ \text{準安定表現}\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l}\text{ドラーム}\\ \text{表現}\end{array}\right\}$$

ここで, 最後の等号は §2.6 の p-進局所モノドロミー定理による. Rep_{G_K} においては, $\mathrm{Rep}_{G_K,\mathrm{dR}} \not\subseteq \mathrm{Rep}_{G_K}$ であることから, l-進表現の場合と異なり, 幾何的なものから来ない p-進表現が多く存在する. このような表現はもはや B_{dR} では扱うことが出来ないが, 全ての p-進表現を扱うことが出来る「(φ,Γ)-加群」の理論というものがある ([Fo91]).

4. $\mathbb{C}_p$-表現の理論 (Tate-Sen の理論):p-進表現の族に対して.

§4 では, 前章までとは一応は独立な内容として, Hodge-Tate 表現の理論の一般化, 精密化である Tate-Sen による $\mathbb{C}_p$-表現の理論 ([Sen73], [Sen80], [Fo04])) を, 特に p-進表現の族 ([Sen88], [Sen93], [BC08]) に対して解説したい.

前章までは, ドラーム表現という幾何的なものから来る p-進表現を扱う理論を解説してきたのであるが, ガロア変形のような p-進表現の p-進的な族を考えると, 幾何的なものから来ない p-進表現が自然に現れ, そのような表現に対しても適用できる理論が必要になる. この章で紹介する Tate-Sen の理論は非常に大雑把に言えば, 離散的な Hodge-Tate 重みを p-進連続的に補間する理論であり, ((φ,Γ)-加群の理論と同様に) 全ての p-進表現に対して適応できる理論である.

4.1. **Tate-Sen の理論:絶対的な場合.** まずは, 族ではなく通常の p-進表現の場合（絶対的な場合) にこの理論を [Fo04] に沿って解説したい. (特に, 応用として, Tate の定理 2.6 の証明の概略を与えたい.) $K_\infty := \cup_{n\geq 0} K(\zeta_{p^n})(\zeta_{p^n} \in \overline{K}$ は 1 の原始 p^n 乗根) とし, $H_K := \mathrm{Gal}(\overline{K}/K_\infty) = \mathrm{Ker}(\chi : G_K \to \mathbb{Z}_p^\times)$ と表す. $\Gamma_K := \mathrm{Gal}(K_\infty/K) = G_K/H_K$ とおく. 円分指標 $\chi : \Gamma_K \hookrightarrow \mathbb{Z}_p^\times$ により, Γ_K は $\mathbb{Z}_p^\times$ の開部分群となる.

Tate-Sen の理論とは, 次で定義される $\mathbb{C}_p$-係数の G_K の表現に関する理論である.

Definition 4.1. W が G_K の $\mathbb{C}_p$-表現であるとは, W は有限次元 $\mathbb{C}_p$-ベクトル空間で, G_K が連続半線形に作用している (つまり, 任意の $a \in \mathbb{C}_p$, $x \in W$ に対して $g(ax) = g(a)g(x)$ が成り立つ) もの, と定義する. $\mathbb{C}_p$-表現の圏を $\mathrm{Rep}_{G_K,\mathbb{C}_p}$ と表す.

まず, $W \in \mathrm{Rep}_{G_K,\mathbb{C}_p}$ に対して, W の $\mathbb{C}_p$-ベクトル空間としての基底を一つ固定し, この基底による G_K の作用を $\mathbb{C}_p$-係数の行列で表すことで, 連続 1-コサイクル $[U_W] \in \mathrm{H}^1(G_K, \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}_p))$ を得る (ここで, $n = \dim_{\mathbb{C}_p} W$). 1-コサイクルの標準的な理論により, $[U_W]$ は W の基底の取り方には依らない.

Tate-Sen の理論とは, $\mathbb{C}_p$-表現 W を $W^{H_K} := \{x \in W | g(x) = x$ (任意の $g \in H_K$)$\}$ または, その精密化 (decompletion という) を通して調べる理論である. 上で解説した 1-コサイクルとの対応で問題をより正確に言い換えると, inflation-restriction 完全列

$$1 \to \mathrm{H}^1(\Gamma_K, \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}_p^{H_K})) \to \mathrm{H}^1(G_K, \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}_p)) \to \mathrm{H}^1(H_K, \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}_p))$$

に現れる $\mathrm{H}^1(H_K, \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}_p))$, 及び $\mathrm{H}^1(\Gamma_K, \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}_p^{H_K}))$ の精密化 (decompletion) を調べる理論である. 本章では

(1) $\mathrm{H}^1(H_K, \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}_p))$ についてまず解説し, 次に
(2) $\mathrm{H}^1(\Gamma_K, \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}_p^{H_K}))$ の精密化 (decompletion)

について解説する. (1), (2) における様々な性質を調べる際には, 拡大 K_∞/K の分岐の様子を非常に精密に調べる (計算する) ことが最も基礎的で重要な部分である. 本稿ではしかし, これらの計算結果の証明については省略させて頂き, これらの計算結果から得られる後述の二つの定理 (定理 4.2 と定理 4.6) から, (1), (2) に関する様々な定理が導かれることを詳しく解説したい. なお, これらの性質 (またはその variant) を用いて Tate-Sen の定理を証明するテクニックは, Tate-Sen の理論以外にも p-進表現論の非常に多くの理論 (例えば, 過収束 (overconvergent) (φ, Γ) 加群の理論 ([CC98]), B-ペアの理論 ([Be08a]) など) においても本質的な役割を果たしており, (1) と (2) の議論は p-進表現論の根幹をなす議論であると言っても過言ではない (と筆者は思っている).

まず, (1) について解説を行うが (1) に関する全ての定理は次の定理 (almost étaleness) から導かれる.

Theorem 4.2. ([Ta67] prop.9, [Fo04] theorem.1.8) *K_∞ の任意の有限次拡大 M に対して, $m_{K_\infty} \subseteq \mathrm{tr}_{M/K_\infty}(\mathcal{O}_M)$ が成り立つ.*

この定理を用いて, (1) に関する次の主定理を証明する.

Theorem 4.3. *次の (i), (ii) が成立する.*

(i) $\mathbb{C}_p^{H_K} = \widehat{K}_\infty$(ここで, $\widehat{K}_\infty \subseteq \mathbb{C}_p$ は K_∞ の p-進完備化).
(ii) 任意の $n \geqq 1$ に対して, $\mathrm{H}^1(H_K, \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}_p)) = \{1\}$.

(i) を証明するためには次の補題が必要である.

Lemma 4.4. *M を K_∞ の有限次ガロア拡大, $J := \mathrm{Gal}(M/K_\infty)$, $\varepsilon > 0$ を任意の正の実数とする. このとき, 任意の $x \in M$ に対してある $y \in K_\infty$ で不等式*

$$v_p(x - y) \geqq \inf_{g\in J}\{v_p(g(x) - x)\} - \varepsilon$$

を満たすものが存在する.

Proof. まず, K_∞ は離散付値体ではないので, $\lambda \in m_{K_\infty}$ で $v_p(\lambda) < \varepsilon$ となるものがとれる. すると, 定理 4.2 により $\mu \in \mathcal{O}_M$ で $\mathrm{tr}_{M/K_\infty}(\mu) = \lambda$ を満たすものがとれる. このとき, 任意の $x \in M$ に対して, $y := \frac{\mathrm{tr}_{M/K_\infty}(x\mu)}{\lambda} \in K_\infty$ とおくと,

$$x - y = \frac{1}{\lambda}(x\lambda - \mathrm{tr}_{M/K_\infty}(x\mu)) = \frac{1}{\lambda}(\sum_{g\in J}(x - g(x))g(\mu))$$

となり, これより題意の不等式を得る. □

この補題を用いて (i) を証明する.

Proof. (of (i)) まず, $\widehat{K}_\infty \subseteq \mathbb{C}_p^{H_K}$ は自明なので, $\mathbb{C}_p^{H_K} \subseteq \widehat{K}_\infty$ を示す. そこで, 任意の $x \in \mathbb{C}_p^{H_K}$ をとると, $\mathbb{C}_p$ の定義から $\{x_n\}_{n\geqq 0} \subseteq \overline{K}$ で $v_p(x - x_n) \geqq n$ (任意の n) となる x_n 達をとることが出来る. このとき, 任意の n に対し x_n を含む K_∞ の有限次ガロア拡大を一つ選び, それを M_n とおき, $J_n := \mathrm{Gal}(M_n/K_\infty)$ とおく. $\varepsilon > 0$ を任意にとる. すると, 補題 4.4 により $y_n \in K_\infty$ で不等式 $v_p(x_n - y_n) \geqq \inf_{g\in J_n}\{v_p(g(x_n) - x_n)\} - \varepsilon$ を満たすものが存在する. さらに, $x \in \mathbb{C}_p^{H_K}$ であることと J_n は H_K の商群であることから, 任意の $g \in J_n$ に対して

$$v_p(g(x_n) - x_n) = v_p(g(x_n - x) + (x - x_n)) \geqq n$$

が成り立つ. これらより, 任意の n に対して

$$v_p(x - y_n) \geqq \inf\{v_p(x - x_n), v_p(x_n - y_n)\} \geqq n - \varepsilon$$

が成り立つ. これは, $\lim_{n\to\infty} y_n = x$ であることを示し, $y_n \in K_\infty$ であったので, $x \in \widehat{K}_\infty$ となる. □

次に (ii) を証明する.

Proof. (of (ii)) 任意の $[U] \in \mathrm{H}^1(H_K, \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}_p))$ をとる. ($U : H_K \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}_p) : \tau \mapsto U_\tau$ を, クラス $[U]$ を与える 1-コサイクルとする.) このとき, $[U] = 1$ であることを示せばよい. まず, U は連続で H_K はコンパクトなので, K の十分大きな有限ガロア拡大 K' を取ると, $U(H_{K'}) \subseteq 1 + p^2\mathrm{M}_n(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p})$ となるように出来る. このとき, inflation-restriction 完全列

$$1 \to \mathrm{H}^1(\mathrm{Gal}(K'_\infty/K_\infty), \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}_p^{H_{K'}})) \to \mathrm{H}^1(H_K, \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}_p)) \to \mathrm{H}^1(H_{K'}, \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}_p))$$

と定理 (i) より $\mathbb{C}_p^{H_{K'}} = \widehat{K}'_\infty$ であること, $\mathrm{Gal}(\widehat{K}'_\infty/\widehat{K}_\infty) = \mathrm{Gal}(K'_\infty/K_\infty)$ であること, 及び Hilbert の定理 90 により, $[U|_{H_{K'}}] = 1 \in \mathrm{H}^1(H_{K'}, \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}_p))$ を示せば十分であることが分かる. よって, 最初から $U(H_K) \subseteq 1 + p^2\mathrm{M}_n(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p})$ が成り立っていると仮定して示せばよい. このとき, $M_1 \in 1 + p\mathrm{M}_n(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p})$ で任意の $\tau \in H_K$ に対し $M_1^{-1}U_\tau\tau(M_1) \in 1 + p^3\mathrm{M}_n(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p})$ を満たすような M_1 を次のようにして取ることができる. まず, K' を K の十分大きい有限ガロア拡大で $U(H_{K'}) \subseteq 1 + p^4\mathrm{M}_n(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p})$ を満たすようにとる. このとき, $x \in m_{K_\infty}$ を $v_p(x) < 1$ となるようにとると, 定理 4.2 により $y \in \mathcal{O}_{K'_\infty}$ で $\mathrm{tr}_{K'_\infty/K_\infty}(y) = x$ を満たすものが取れる. 取り方より, $\alpha := \frac{y}{x} \in K'_\infty$ とおくと $\mathrm{tr}_{K'_\infty/K_\infty}(\alpha) = 1$, $v_p(\alpha) > -1$ を満たしている. $Q \subseteq H_K$ で $\mathrm{Gal}(K'_\infty/K_\infty)$ の持ち上げとなっているもの Q を任意にとる. 以上の設定で, $M_1 := \sum_{\tau\in Q}\tau(\alpha)U_\tau$ とおくと, α の定義により, $M_1 \in 1 + p\mathrm{M}_n(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p})$ を満たす. さらに, 任意の $\tau' \in H_K$ に対して,

$$\begin{aligned} M_1^{-1}U_{\tau'}\tau'(M_1) - 1 &= M_1^{-1}(U_{\tau'}\tau'(M_1) - M_1) \\ &= M_1^{-1}(U_{\tau'}\tau'(\textstyle\sum_{\tau\in Q}\tau(\alpha)U_\tau) - \sum_{\tau\in Q}\tau(\alpha)U_\tau) \\ &= M_1^{-1}(\textstyle\sum_{\tau\in Q}\tau'\tau(\alpha)U_{\tau'\tau} - \sum_{\tau\in Q}\tau(\alpha)U_\tau) \end{aligned}$$

を得る. 最後の項で $\{\tau'\tau\}_{\tau\in Q} = \{\tau\tau_{i(\tau)}\}_{\tau\in Q}$ (ここで, $\tau_{i(\tau)} \in H_{K'}$) と書けるが, このとき, α の定義と K' の取り方により,

$$\tau\tau_{i(\tau)}(\alpha)U_{\tau\tau_{i(\tau)}} - \tau(\alpha)U_\tau = \tau(\alpha)U_\tau(\tau(U_{\tau_{i(\tau)}}) - 1) \in p^3\mathrm{M}_n(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p})$$

を満たす. これらの和を考えて, $M_1^{-1}U_{\tau'}\tau'(M_1)-1\in p^3\mathrm{M}_2(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p})$ となる. 以下, 同様にして k に関して帰納的に $M_k\in 1+p^k\mathrm{M}_n(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p})$ で, 任意の $\tau'\in H_K$ に対して

$$(M_1M_2\cdots M_k)^{-1}U_{\tau'}\tau'(M_1\cdots M_k)\in 1+p^{k+2}\mathrm{M}_n(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p})$$

を満たす M_k をとることが出来る. 最後に, $M:=\prod_{k=1}^{\infty}M_k$(積は左から順に $M_1M_2\cdots$ と掛ける) とすると, $M\in 1+p\mathrm{M}_n(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p})$ は収束し, 任意の $\tau'\in H_K$ に対して, $M^{-1}U_{\tau'}\tau'(M)=1$ となる. これは, $[U]=1\in\mathrm{H}^1(H_K,\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}_p))$ を意味する.

□

以上で証明された定理 (i)(ii) を $\mathrm{Rep}_{G_K,\mathbb{C}_p}$ に適応すると, 次の定理が得られる.

任意の $W\in\mathrm{Rep}_{G_K,\mathbb{C}_p}$ に対して上の定理 (i) により,

$$W^{H_K}:=\{x\in W|\tau(x)=x\ \text{任意の}\ \tau\in H_K\}$$

は $\widehat{K}_\infty$-ベクトル空間で, G_K は Γ_K を経由して作用する.

Corollary 4.5. 任意の $W\in\mathrm{Rep}_{G_K,\mathbb{C}_p}$ に対して, $\mathbb{C}_p$-表現の自然な射

$$\mathbb{C}_p\otimes_{\widehat{K}_\infty}W^{H_K}\to W: a\otimes x\mapsto ax$$

は同型である. 特に,

$$\dim_{\widehat{K}_\infty}W^{H_K}=\dim_{\mathbb{C}_p}W$$

が成立する.

Proof. W から 1 コサイクル $[U_W]\in\mathrm{H}^1(G_K,\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}_p))$ を対応させると, 定理 (ii) より, $[U_W|_{H_K}]=1$ となるが, これを (i) を用いて $\mathbb{C}_p$-表現の言葉に言い換えると上の同型になる. □

これにより, $\mathbb{C}_p$-表現 W を考えることは Γ_K が作用する $\widehat{K}_\infty$-ベクトル空間 W^{H_K} を考えることと等しくなった. しかし, $\widehat{K}_\infty$ は, K 上超越的な元を含みまだ代数的には扱いにくい. Tate-Sen 理論において 2 番目の重要なステップは W^{H_K} を $\widehat{K}_\infty$ 上から K_∞ 上へ脱完備化 (decompletion) するステップである. そのためには次で定義される, K_∞ から K への "トレース" 射が最も重要である. これを, K_∞/K が $\mathbb{Z}_p$ 拡大の場合に次のように定義する. K_∞/K は $\mathbb{Z}_p$ 拡大, つまり $\Gamma_K=\mathrm{Gal}(K_\infty/K)\xrightarrow{\sim}\mathbb{Z}_p$ が成り立つと仮定する. このとき, 任意の n に対して $K_{(n)}$ を $K\subseteq K_{(n)}\subseteq K_\infty$ となる中間体で $\mathrm{Gal}(K_{(n)}/K)\xrightarrow{\sim}\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ となる唯一の K の拡大とする. $\gamma_0\in\Gamma_K\xrightarrow{\sim}\mathbb{Z}_p$ を同型で $1\in\mathbb{Z}_p$ に対応する元とする. このとき,

$$t_K: K_\infty\to K$$

を $x\in K_{(n)}$ に対して $t_K(x):=\frac{1}{p^n}\mathrm{tr}_{K_{(n)}/K}(x)\in K$ と定義する. t_K は well-defined な K-線形写像で, $x\in K$ に対しては $t_K(x)=x$ を満たし, $t_K(\gamma(x))=t_K(x)$ (任意の $\gamma\in\Gamma_K$, $x\in K_\infty$) を満たす. この t_K の連続性に関する次の定理が最も重要であり, この証明にも 拡大 K_∞/K の分岐に関する非常に精密な計算が本質的に用いられる.

以下, 一般の p-進体 K, $n\geqq 0$ に対し, $K_n:=K(\zeta_{p^n})$ と置く (紛らわしいが, K_n と $K_{(n)}$ は異なる記号であることに注意).

Theorem 4.6. ([Fo04].prop.1.13]) 任意の K に対して, 十分大きな $n\geqq 0$ が存在し, K_∞/K_n は $\mathbb{Z}_p$ 拡大で, 不等式

$$v_p(t_{K_n}(x)-x)\geqq v_p(\gamma_n(x)-x)-\frac{p}{p-1}$$

が成り立つ (ここで, γ_n は Γ_{K_n} の位相的生成元).

この定理から, $t_K: K_\infty\to K$, 及び t_K の $\widehat{K}_\infty$ への延長に関して最重要な次の定理が導かれる. Tate-Sen の理論 (2)(decompletion) の証明は, これらの性質から全て導かれる.

Theorem 4.7. K_∞/K が $\mathbb{Z}_p$ 拡大で, t_K 自身が上の不等式を満たすような K に関して, 次が成り立つ (γ_0 を Γ_K の位相的生成元とする).

(1) $t_K : K_\infty \to K$ は連続である.

(2) (1) により定まる t_K の $\widehat{K}_\infty$ への唯一の連続な延長を同じく

$$t_K : \widehat{K}_\infty \to K$$

と表す. $L := \mathrm{Ker}(t_K : \widehat{K}_\infty \to K)$ と置く. このとき, $\widehat{K}_\infty = L \oplus K$ であり,

$$\gamma_0 - 1 : L \to L$$

は連続な同型である.

(3) $\gamma_0 - 1 : L \to L$ の逆写像を

$$\rho : L \to L$$

とおくと ρ は連続であり, 任意の $y \in L$ に対し不等式

$$v_p(\rho(y)) \geqq v_p(y) - \frac{p}{p-1}$$

が成り立つ.

Proof. (1) の証明. 定理 4.6 により, 任意の $x \in K_\infty$ に対して,

$$\begin{aligned} v_p(t_K(x)) &= v_p(t_K(x) - x + x) \\ &\geqq \inf\{v_p(t_K(x) - x), v_p(x)\} \\ &\geqq \inf\{v_p(\gamma_0(x) - x) - \frac{p}{p-1}, v_p(x)\} \\ &\geqq v_p(x) - \frac{p}{p-1} \end{aligned}$$

より, t_K は連続. よって, t_K は唯一の連続な延長 $t_K : \widehat{K}_\infty \to K$ を持つ.

(2) の証明. まず, $\widehat{K}_\infty = L \oplus K$ となることを証明する. $x \in L \cap K$ とすると, $x = t_K(x) = 0$ より $L \cap K = \{0\}$ である. 任意の $x \in \widehat{K}_\infty$ に対し, $t_K(x) \in K$, $x - t_K(x) \in L$ なので, $x \in L \oplus K$ となる. よって, $\widehat{K}_\infty = L \oplus K$ が成り立つ. 次に $\gamma_0 - 1 : L \to L$ が同型であることを証明する. 任意の n に対して $L_n := L \cap K_n$ とおくと $K_n^{\gamma_0 = 1} = K$ であるから $\gamma_0 - 1 : L_n \to L_n$ は単射であり, L_n は有限次元 K-ベクトル空間であるから同型になる. よってあとは, $\cup_{n \geqq 0} L_n$ が L の中で稠密であることを示せばよい. そこで, 任意の $x \in L$ をとると, $L \subseteq \widehat{K}_\infty$ であるから, $\{x_n\}_{n \geqq 1} \subseteq K_\infty$ で $x = \lim_{n \to \infty} x_n$ となるものが存在する. このとき, t_K の連続性から, $0 = t_K(x) = \lim_{n \to \infty} t_K(x_n)$ となる. よって, $x = \lim_{n \to \infty}(x_n - t_K(x_n))$ で, $x_n - t_K(x_n) \in \cup_{n \geqq 0} L_n$ となる. これは $\cup_{n \geqq 0} L_n$ が L 内で稠密であることを示している.

(3) の証明. $\rho : L \to L$ を $\gamma_0 - 1 : L \to L$ の逆写像とする. $y \in L$ に対して, $\rho(y) \in L$ なので, 定理 4.6 より,

$$v_p(\rho(y)) = v_p(t_K(\rho(y)) - \rho(y)) \geqq v_p((\gamma_0 - 1)\rho(y)) - \frac{p}{p-1} = v_p(y) - \frac{p}{p-1}$$

が成り立つ.

□

これら t_K の性質から, 次の定理を得ることが出来る.

Theorem 4.8. K を任意の p-進体とする. 次の (i), (ii) が成立する,

(i) $\mathbb{C}_p^{G_K} = K$.

(ii) 埋め込み $K_\infty \hookrightarrow \widehat{K}_\infty$ から導かれる自然な射

$$\mathrm{H}^1(\Gamma_K, \mathrm{GL}_n(K_\infty)) \to \mathrm{H}^1(\Gamma_K, \mathrm{GL}_n(\widehat{K}_\infty))$$

は同型.

Proof. (i) の証明. 十分大きな K の有限次ガロア拡大 K' に対して示せればよいので, K が定理 4.7 の仮定を満たすときに示せばよい. このとき, (i) は定理 4.3 の (1) と定理 4.7(2) の $\gamma_0 - 1 : L \to L$ が同型であることから従う.

(ii) の証明.

まずは, 全射を示す. $U : \Gamma_K \to \mathrm{GL}_n(\widehat{K}_\infty)$ を任意の連続 1-コサイクルとする. このとき, 任意の k に対して, 十分大きな $m > 0$ をとると K_∞/K_m は定理 4.7 の条件を満たし, かつ $U_{\gamma_0} \in 1 + p^k\mathrm{M}_n(\mathcal{O}_{\widehat{K}_\infty})$ (ここで, γ_0 は Γ_{K_m} の位相的生成元) を満たすようにできる.

まずは, U をコバウンダリーでひねることにより, $U_{\gamma_0} \in M_n(\mathcal{O}_{K_m})$ と出来ることを証明する. $U_{\gamma_0} := 1 + U_0$ ($U_0 \in \mathrm{M}_n(\mathcal{O}_{K_m})$) とおくと, 取り方より $v_p(U_0) \geqq k$ を満たしている. この状況で,

$$U_0 = (U_0 - t_{K_m}(U_0)) + t_{K_m}(U_0)$$

で, $U_0 - t_{K_m}(U_0) \in \mathrm{M}_n(\mathrm{Ker}(t_{K_m}))$ なので, 定理 4.7(3) より, $V_1 \in \mathrm{M}_n(\mathrm{Ker}(t_{K_m}))$ で,

$$U_0 = (\gamma_0 - 1)(V_1) + t_{K_m}(U_0)$$

となるものが唯一存在する. 定理 4.6 と定理 4.7(3) より,

$$\begin{aligned} v_p(t_{K_m}(U_0)) = \ & \inf\{v_p(t_{K_m}(U_0) - U_0), v_p(U_0)\} \\ & \geqq v_p(U_0) - \frac{p}{p-1} \\ & \geqq k - \frac{p}{p-1} \end{aligned}$$

および,

$$\begin{aligned} v_p(V_1) & = v_p(\rho(U_0 - t_{K_m}(U_0))) \\ & \geqq v_p(U_0 - t_{K_m}(U_0)) - \frac{p}{p-1} \\ & \geqq v_p(U_0) - 2\frac{p}{p-1} \\ & \geqq k - 2\frac{p}{p-1} \end{aligned}$$

を満たす. このとき, $(1 - V_1)^{-1}(1 + U_0)(1 - \gamma_0(V_1))$ を法 p^{k+1} で計算すると, 最初から k を十分大きく取っておけば V_1, U_0 を二つ以上掛けると付値が $k+1$ 以上となるので, 法 p^{k+1} で,

$$\begin{aligned} (1 - V_1)^{-1}(1 + U_0)(1 - \gamma_0(V_1)) & = (1 + V_1 + V_1^2 + \cdots)(1 + U_0)(1 - \gamma_0(V_1)) \\ & \equiv 1 + V_1 + U_0 - \gamma_0(V_1) \bmod p^{k+1} \\ & = 1 + V_1 + ((\gamma_0 - 1)(V_1) + t_{K_m}(U_0)) - \gamma_0(V_1) \\ & = 1 + t_{K_m}(U_0) \end{aligned}$$

となる. よって, $(1 - V_1)^{-1}(1 + U_0)(1 - \gamma_0(V_1)) = 1 + U_1 + W_1$, $U_1 \in \mathrm{M}_n(\mathcal{O}_{\widehat{K}_\infty})$, $W_1 \in \mathrm{M}_n(\mathcal{O}_{K_m})$, $v_p(U_1) \geqq k + 1$, $v_p(W_1) \geqq k - \frac{p-1}{p}$ となるように U_1, W_1 を取れる. 次に, 同様にして $U_1 = (\gamma_0 - 1)(V_2) + t_{K_m}(U_1)$ と置くと, $v_p(V_2) \geqq k + 1 - 2\frac{p}{p-1}$, $v_p(t_{K_m}(U_1)) \geqq k + 1 - \frac{p}{p-1}$ が成り立ち, k を上と同様に大きく取っておけば法 p^{k+2} に対して,

$$\begin{aligned} (1 - V_2)^{-1}(1 + U_1 + W_1)(1 - \gamma_0(V_2)) & = (1 + V_2 + V_2^2 + \cdots)(1 + U_1 + W_1)(1 - \gamma_0(V_2)) \\ & \equiv 1 + W_1 + t_{K_m}(U_1) \end{aligned}$$

が成り立つ. つまり, $W_2 := t_{K_m}(U_1)$ とおくと, $(1 - V_2)^{-1}(1 + U_1 + W_1)(1 - \gamma_0(V_2) = 1 + U_2 + (W_1 + W_2)$, $U_2 \in \mathrm{M}_n(\mathcal{O}_{\widehat{K}_\infty})$, $W_2 \in \mathrm{M}_n(\mathcal{O}_{K_m})$, $v_p(U_2) \geqq k + 2$, $v_p(W_2) \geqq k + 1 - \frac{p}{p-1}$ となる.

以下, 帰納的に, $V_i \in \mathrm{M}_n(\mathcal{O}_{\widehat{K}_\infty})$, $v_p(V_i) \in k+(i-1)-2\frac{p}{p-1}$ で,

$\{(1-V_1)(1-V_2)\cdots(1-V_i)\}^{-1}(1+U_0)\{(1-\gamma_0(V_1))\cdots(1-\gamma_0(V_i))\} = 1+U_i+(W_1+W_2+\cdots+W_i)$
で, $U_i \in \mathrm{M}_n(\mathcal{O}_{\widehat{K}_\infty})$, $W_i \in \mathrm{M}_n(\mathcal{O}_{K_m})$, $v_p(U_i) \geqq k+i$, $v_p(W_i) \geqq k+(i-1)-\frac{p}{p-1}$ となるようなものが取れる. そこで, $(1-V) := \prod_{i=1}(1-V_i) \in \mathrm{M}_n(\mathcal{O}_{\widehat{K}_\infty})$ と置くと, この元は収束し, $(1-V)^{-1}(1+U_0)(1-\gamma_0(V)) = 1+W \in \mathrm{M}_n(\mathcal{O}_{K_m})$, $v_p(W) \geqq k-\frac{p}{p-1}$ となるように出来る. 次に, この状況で, 新しいコサイクルを $U'_\gamma := (1-V)U_\gamma(1-\gamma(V))$ $(\gamma \in \Gamma_K)$ と定めると, V の取り方から $U'_{\gamma_0} \in \mathrm{M}_n(\mathcal{O}_{K_m})$ かつ $v_p(U'_{\gamma_0}-1) \geqq k-\frac{p}{p-1}$ を満たしている.

この時, 任意の $\gamma \in \Gamma_K$ に対して, $U'_\gamma \in \mathrm{GL}_n(K_m)$ となっている (これが示せれば全射性の証明が終わる). この claim を証明するために, まず Γ_K はアーベル群であることとコサイクル条件から

$$U'_\gamma\gamma(U'_{\gamma_0}) = U'_{\gamma\gamma_0} = U'_{\gamma_0\gamma} = U'_{\gamma_0}\gamma_0(U'_\gamma),$$

つまり $\gamma_0(U'_\gamma) = U'^{-1}_{\gamma_0}U'_\gamma\gamma(U'_{\gamma_0})$ が成り立つ. t_{K_m} が K_m-線形であることから, 同様な等式

$$\gamma_0(U'_\gamma - t_{K_m}(U'_\gamma)) = U'^{-1}_{\gamma_0}(U'_\gamma - t_{K_m}(U'_\gamma))\gamma(U'_{\gamma_0})$$

が成り立つ. すると,

$$\begin{aligned}(\gamma_0-1)(U'_\gamma - t_{K_m}(U'_\gamma)) &= U'^{-1}_{\gamma_0}(U'_\gamma - t_{K_m}(U'_\gamma))\gamma(U'_{\gamma_0}) - (U'_\gamma - t_{K_m}(U'_\gamma)) \\ &= (U'^{-1}_{\gamma_0}-1)(U'_\gamma - t_{K_m}(U'_\gamma))\gamma(U'_{\gamma_0}) \\ &\quad +(U'_\gamma - t_{K_m}(U'_\gamma))(\gamma(U'_{\gamma_0})-1)\end{aligned}$$

となるので, これと定理 4.7(3) を用いると

$$\begin{aligned}v_p(U'_\gamma - t_{K_m}(U'_\gamma)) &= v_p(\rho((\gamma_0-1)(U'_\gamma - t_{K_m}(U'_\gamma)))) \\ &\geqq v_p((\gamma_0-1)(U'_\gamma - t_{K_m}(U'_\gamma))) - \frac{p}{p-1} \\ &\geqq v_p(U'_\gamma - t_{K_m}(U'_\gamma)) + \inf\{v_p(U'^{-1}_{\gamma_0}-1), v_p(\gamma(U'_{\gamma_0})-1)\} - \frac{p}{p-1} \\ &\geqq v_p(U'_\gamma - t_{K_m}(U'_\gamma)) + k - 2\frac{p}{p-1}\end{aligned}$$

を得る. k の取り方から $k-2\frac{p}{p-1} > 0$ なので,

$$v_p(U'_\gamma - t_{K_m}(U'_\gamma)) = \infty,$$

つまり

$$U'_\gamma = t_{K_m}(U'_\gamma) \in \mathrm{M}_n(K_m)$$

でなければならない. 以上で全射性が証明できた.

(ii) の単射性の証明. 連続 1 コサイクル $U : \Gamma_K \to \mathrm{GL}_n(K_\infty)$ で, $V \in \mathrm{GL}_n(\widehat{K}_\infty)$ で任意の $\gamma \in \Gamma_K$ に対して $V^{-1}U_\gamma\gamma(V) = 1$ となるものが存在するとする. このとき, $V \in \mathrm{GL}_n(K_\infty)$ であることを証明すればよい. そこで, 全射性の証明の時と同様に十分大きい m で, $U_{\gamma_0} \in 1+p^k\mathrm{M}_n(\mathcal{O}_{K_m})$ (γ_0 は Γ_{K_m} の位相的生成元) となるように取る. このとき, $V^{-1}U_{\gamma_0}\gamma_0(V) = 1$ より, $\gamma_0(V) = U^{-1}_{\gamma_0}V$ となるので,

$$(\gamma_0-1)(V - t_{K_m}(V)) = (U^{-1}_{\gamma_0}-1)(V - t_{K_m}(V))$$

となり, これと定理 4.7(3) から不等式

$$\begin{aligned}v_p(V - t_{K_m}(V)) &= v_p(\rho((\gamma_0-1)(V - t_{K_m}(V)))) \\ &\geqq v_p((\gamma_0-1)(V - t_{K_m}(V))) - \frac{p}{p-1} \\ &\geqq v_p(V - t_{K_m}(V)) + v_p(U^{-1}_{\gamma_0}-1) - \frac{p}{p-1} \\ &\geqq v_p(V - t_{K_m}(V)) + k - \frac{p}{p-1}\end{aligned}$$

となり, $k-\frac{p}{p-1} > 0$ なので $V = t_{K_m}(V) \in \mathrm{M}_n(K_m)$ でなければならない.

$\square$

この定理から W^{H_K} の decompletion に関する重要な定理が得られるが, その証明に必要な次の命題を証明する.

Proposition 4.9. $M \subseteq \widehat{K}_\infty$ を Γ_K の作用で閉じている $\widehat{K}_\infty$ の有限次元部分 K-ベクトル空間とする. このとき, $M \subseteq K_\infty$ となる.

Proof. M を上の条件を満たすものとする. K の任意の有限次拡大 K' に対して, $M_{K'} \subseteq \widehat{K}'_\infty$ を M を K' 上に係数拡大したものとする. 明らかに $M_{K'}$ の場合に命題の主張が示せれば, M の場合も従うので K を十分大きく取って, K_∞/K が定理 4.7 の仮定を満たし, さらに生成元 $\gamma_0 \in \Gamma_K$ の M への作用の固有値が全て K 内にあり, M の広義固有空間分解が K 上で出来ると仮定してよい. さらに, 各固有値に対する広義固有空間についてそれぞれ示せばよいので, M の固有値は $\alpha \in K^\times$ ただ一つと仮定してよい. さらに, $\gamma_0^{p^m} \to 1 (m \to \infty)$ で, $\gamma_0^{p^m}$ の固有値は α^{p^m} であるから, 作用の連続性により $\alpha^{p^m} \to 1$ となる. そこで, $\alpha^{p^m} \in 1+p^k\mathcal{O}_K$ となるように m を十分大きくとり K をさらに取り直して最初から $\alpha \in 1+p^k\mathcal{O}_K$ の場合に示せばよい. 以下, この状況で $M \neq 0$ ならば $M = K$ となることを証明する. 定理 4.7(2) より $\gamma_0 - 1 : L \to L$ は同型なので, $\alpha = 1$ となることを証明すればよい. そこで, 背理法で $\alpha \neq 1$ とする. このとき, M の γ_0 の固有ベクトル u を一つ取ると, $(\gamma_0 - 1)(u) = (\alpha - 1)u$ より, $v_p(\frac{1}{\alpha-1}u) = v_p(\rho(u)) \geqq v_p(u) - \frac{p}{p-1}$. $v_p(\frac{1}{\alpha-1}u) = v_p(u) - k$ なのでこれは矛盾である. よって, $\alpha = 1$ となり, $M = K$ となる. $\square$

$W \in \mathrm{Rep}_{G_K,\mathbb{C}_p}$ とする. $x \in W^{H_K}$ に対して $\langle x\rangle_{\Gamma_K}$ を $\{\gamma(x)\}_{\gamma\in\Gamma_K}$ で生成される W^{H_K} の部分 K_∞-ベクトル空間とする. W^{H_K} の Γ_K 作用で閉じている部分 K_∞-ベクトル空間

$$W^{H_K}_{\mathrm{fin}} := \{x \in W^{H_K} | \dim_{K_\infty}\langle x\rangle_{\Gamma_K} < \infty\}$$

とおく.

Theorem 4.10. $W \in \mathrm{Rep}_{G_K,\mathbb{C}_p}$ に対して, 次が成り立つ.

(1) $W^{H_K}_{\mathrm{fin}}$ は有限次元 K_∞-部分空間でさらに

$$\dim_{K_\infty} W^{H_K} = \dim_{\mathbb{C}_p} W$$

が成り立ち, さらに自然な射

$$\widehat{K}_\infty \otimes_{K_\infty} W^{H_K}_{\mathrm{fin}} \to W^{H_K} : a \otimes x \mapsto ax$$

は同型になる.

(2) $\nabla : W^{H_K}_{\mathrm{fin}} \to W^{H_K}_{\mathrm{fin}}$ を

$$\nabla(x) := \lim_{\gamma\to 1} \frac{1}{\log\chi(\gamma)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(\gamma-1)^n}{n}(x)$$

と定義する (ここで極限　$\gamma \to 1$ は $\gamma \in \Gamma_K$ を $\gamma \neq 1$ とならないように 1 に近づける極限とする) と, これは well-defined な K_∞-線形写像で, その特性多項式

$$\det(T - \nabla|_{W^{H_K}_{\mathrm{fin}}}) \in K[T]$$

(つまり, 係数が K 上) となる.

Proof. (i) の証明. まず, 定理 4.8(i) の全射性により W^{H_K} の Γ_K 作用で閉じている有限次元 K_∞-ベクトル空間 W_∞ で $\widehat{K}_\infty \otimes_{K_\infty} W_\infty \xrightarrow{\sim} W^{H_K} : a \otimes x \mapsto ax$ が同型となるようなものが存在する. 定理 4.8(ii) の単射性からこのような W_∞ は一意に定まる. よってあとは, $W^{H_K}_{\mathrm{fin}} = W_\infty$ を示せばよいが, $W_\infty \subseteq W^{H_K}_{\mathrm{fin}}$ は自明なので $W^{H_K}_{\mathrm{fin}} \subseteq W_\infty$ を示せばよい. そこで, $x \in W^{H_K}$ を $\dim_{K_\infty}\langle x\rangle_{\Gamma_K} < \infty$ となるようなものとする. $e_1, e_2, \cdots, e_m$ を $\langle x\rangle_{\Gamma_K}$ の K_∞ 上の基底とし, $f_1, \cdots, f_d$ を W_∞ の K_∞ 上の基底とする. すると, 任意の $1 \leqq i \leqq m$ に対して, $e_i := \sum_{j=1}^d a_{ij} f_j$ $(a_{ij} \in \widehat{K}_\infty)$ と書けるが, $\langle x\rangle_{\Gamma_K}$ および W_∞ が Γ_K 作用で閉じていることから, 十分大きな n に

対して $\{a_{ij}\}_{1\leqq i\leqq m,1\leqq j\leqq d}$ で生成される K_n-ベクトル空間は Γ_{K_n} の作用で閉じていることが分かる．このとき, 命題 4.9 より $a_{ij}\in K_\infty$ となり, これは $e_i\in W_\infty$, 特に $x\in W_\infty$ を示している．

(ii) の証明．まず, $x\in W_{\mathrm{fin}}^{H_K}$ に対して,

$$\nabla=\lim_{\gamma\to 1}\frac{1}{\log(\chi(\gamma))}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(\gamma-1)^n}{n}(x)\in W_{\mathrm{fin}}^{H_K}$$

が well-defined で ∇ が K_∞-線形写像であることは容易に分かる．次に, $A\in \mathrm{M}_d(K_\infty)$ を ∇ の上にとった基底 $f_1,\cdots,f_d$ に関する行列表示とする．この時, ∇ の定義と Γ_K はアーベル群であることから, 任意の $\gamma\in\Gamma_K$ に対して, ∇ の基底 $\gamma(f_1),\cdots,\gamma(f_d)$ に関する行列表示は $\gamma(A)$ となることが分かる．A の特性多項式と $\gamma(A)$ の特性多項式は ∇ の特性多項式と等しいので, $\det(T-\nabla|_{W_{\mathrm{fin}}^{H_K}})\in K[X]$ を得る． □

Definition 4.11.

(1) $W\in \mathrm{Rep}_{G_K,\mathbb{C}_p}$ に対して,

$$D_{\mathrm{Sen}}(W):=W_{\mathrm{fin}}^{H_K}$$

と書く．定理 4.10 で定義された作用素

$$\nabla: D_{\mathrm{Sen}}(W)\to D_{\mathrm{Sen}}(W)$$

を W の Sen 作用素と呼ぶ.

$$P_W(X)\in K[X]$$

を ∇ の特性多項式とし, これを W の Sen 多項式と呼ぶ．$P_W(X)$ の根 (∇ の固有値) を W の一般化 Hodge-Tate 重み と呼ぶ.

(2) $V\in \mathrm{Rep}_{G_K}$ に対し

$$D_{\mathrm{Sen}}(V):=D_{\mathrm{Sen}}(\mathbb{C}_p\otimes_{\mathbb{Q}_p}V)$$

と表し,

$$P_V(X):=P_{\mathbb{C}_p\otimes_{\mathbb{Q}_p}V}(X)$$

を V の Sen 多項式と呼び, $P_V(X)$ の根を V の一般化 Hodge-Tate 重みと呼ぶ.

Remark 4.12. $D_{\mathrm{Sen}}(\mathbb{Q}_p(i))=K_\infty e_i$ で, $\nabla(e_i)=ie_i$ となる．よって, $\mathbb{Q}_p(i)$ の一般化 Hodge-Tate 重みは i となる．

名前から分かるように, 一般化 Hodge-Tate 重みは Hodge-Tate 表現の Hodge-Tate 重みの一般化なのだが, より正確に次のことが成り立つ.

Proposition 4.13. $V\in\mathrm{Rep}_{G_K}$ に対し, 次の 2 条件は同値.

(1) V は Hodge-Tate 表現.

(2) V の一般化 Hodge-Tate 重みは全て整数で, さらに ∇ の $D_{\mathrm{Sen}}(V)$ への作用は半単純 (つまり対角化可能) になる.

このとき, V の Hodge-Tate 重みと一般化 Hodge-Tate 重みは一致する.

Proof. (1) ならば (2) が成り立つのは V の Hodge-Tate 分解 (Definition 2.15) と上の例 4.12 から明らか. (2) ならば (1) となることを示す．まず, K の 任意の有限次拡大 K' に対して, V が Hodge-Tate であることと $V|_{G_{K'}}$ が Hodge-Tate であることは同値であるから, 最初から ∇ の固有ベクトルが $W_{\mathrm{fin}}^{H_K}$ 上で取れると仮定してよい．そこで, $e_1,e_2\cdots,e_d$ を固有ベクトルからなる基底とし, $\nabla(e_i)=n_ie_i$ が $(n_i\in\mathbb{Z})$ が成り立つとする．∇ の定義から任意の $x\in W_{\mathrm{fin}}^{H_K}$ に対し, 十分 1 に近い $\gamma\in\Gamma_K$ に対しては $\gamma(x)=\exp(\log(\chi(\gamma))\nabla(x))$ が成り立つので, 十分大きな n に対して

$$\gamma(e_i)=\exp(\log(\chi(\gamma))n_i)e_i=\chi(\gamma)^{n_i}e_i\ \ (\gamma\in\Gamma_{K_n})$$

が成り立つ．これより, $\mathbb{C}_p\otimes_{\mathbb{Q}_p}V|_{G_{K_n}}\xrightarrow{\sim}\mathbb{C}_p\otimes_{K_\infty}D_{\mathrm{Sen}}(V|_{G_{K_n}})\xrightarrow{\sim}\bigoplus_{i=1}^d\mathbb{C}_p(n_i)$ がなりたつ. よって, $V|_{G_{K_n}}$ は Hodge-Tate 表現であり, V も Hodge-Tate 表現となる.

命題の最後の主張は証明から明らかである． □

以上で, 通常の p-進表現に対する Tate-Sen 理論の主内容の解説を終えるが, 最後にこれらの理論を使って $\mathbb{C}_p(i)$ のガロアコホモロジーに関する Tate の定理 (定理 2.2) の証明を与える.

Theorem 4.14. (1) $i=0$ のとき, $\mathrm{H}^0(G_K,\mathbb{C}_p)=K$, $\mathrm{H}^1(G_K,\mathbb{C}_p)=K$.
(2) $i\neq 0$ のとき, $\mathrm{H}^j(G_K,\mathbb{C}_p(i))=0$ (任意の j).

Proof. まず, $\mathrm{H}^0(G_K,\mathbb{C}_p)=K$ は定理 4.8(i) で証明した. $i\neq 0$ に対して, $\mathrm{H}^0(G_K,\mathbb{C}_p(i))=0$ となることを証明する. K が十分大きい場合に示せばよいので, K が定理 4.7 の条件を満たし, さらに $v_p(\chi(\gamma_0)-1)>\frac{p}{p-1}$ を満たすと仮定する. このとき, $\mathbb{C}_p(i)^{H_K}=\widehat{K}_\infty e_i=Le_i\bigoplus Ke_i$ である. まず, $\gamma_0-1:Ke_i\to Ke_i$ は同型となるのは明らかなので, $\gamma_0-1:Le_i\to Le_i$ が単射となることを示せばよい. 任意の $x\in L$ は定理 4.7(2) より $x=\rho(y)$ $(y\in L)$ と書ける. もし $\gamma_0(xe_i)=xe_i$ ならば,

$$\begin{aligned}0=(\gamma_0-1)(\rho(y)e_i)&=\gamma_0(\rho(y))\chi(\gamma_0)^ie_i-\rho(y)e_i\\&=\chi(\gamma_0)^i(\gamma_0-1)(\rho(y))e_i+(\chi(\gamma_0)^i-1)\rho(y)e_i\\&=\chi(\gamma_0)^iye_i+(\chi(\gamma_0)^i-1)\rho(y)e_i.\end{aligned}$$

よって, 定理 4.7(3) と K の取り方により,

$$\begin{aligned}v_p(y)&=v_p(\chi(\gamma_0)^i-1)+v_p(\rho(y))\\&\geqq v_p(\chi(\gamma_0)^i-1)+v_p(y)-\tfrac{p}{p-1}\\&>v_p(y).\end{aligned}$$

よって $y=0$ つまり $x=0$ でなければならない. 以上より, $(\mathbb{C}_p(i))^{G_K}=0$ が証明出来た.

次に $\mathrm{H}^1(G_K,\mathbb{C}_p(i))$ について証明する. まず, 定理 4. 3(ii) より任意の $\mathbb{C}_p$ 表現 W に対して $W|_{H_K}$ は自明な (H_K の)$\mathbb{C}_p$-表現となるので, $\mathrm{H}^1(H_K,\mathbb{C}_p(i))=0$ が成り立つ. これと inflation-restriction 完全列により, 同型 $\mathrm{H}^1(\Gamma_K,\widehat{K}_\infty e_i)\xrightarrow{\sim}\mathrm{H}^1(G_K,\mathbb{C}_p(i))$ を得る. ここで, n を十分大きくとり K_n が定理 4.7 の条件を満たすようにとる. 再び inflation-restriction 完全列より

$$0\to\mathrm{H}^1(\mathrm{Gal}(K_n/K),(\mathbb{C}_p(i))^{G_{K_n}})\to\mathrm{H}^1(\Gamma_K,\widehat{K}_\infty e_i)\to\mathrm{H}^1(\Gamma_{K_n},\widehat{K}_\infty e_i)^{\mathrm{Gal}(K_n/K)}\to 0$$

があるので, K_n の場合に定理の主張を証明すればよい. よって, 最初から K が定理 4.7 の条件を満たすと仮定してよい. このとき, Γ_K は 位相的に γ_0 で生成されるので, $\mathrm{H}^1(\Gamma_K,\widehat{K}_\infty e_i)\xrightarrow{\sim}\widehat{K}_\infty e_i/(\gamma_0-1)\widehat{K}_\infty e_i$ と計算される (一般の $\mathbb{C}_p$-表現のガロアコホモロジーも同様な複体で計算される). よって定理 4.7(2) より, $i=0$ のとき $\mathrm{H}^1(\Gamma_K,\widehat{K}_\infty e_0)=K$ となる (G_K の作用も込めた同型). $i\neq 1$ のときは, H^0 の場合の証明により, $\gamma_0-1:Le_i\to Le_i$ は単射になる. よって, 任意の n に対してこの射を $L_n:=L\cap K_n$ に制限したものは (有限次元性) により同型であり, $\cup_{n\geqq 0}L_n$ は L の中で稠密であるので, $\gamma_0-1:Le_i\to Le_i$ も同型になる. これより $i\neq 0$ のとき, $\mathrm{H}^1(\Gamma_K,\widehat{K}_\infty e_i)=0$ を得る. □

4.2. **Tate-Sen の理論:相対的な場合.** ガロア表現の (普遍) 変形などのようなガロア表現の p-進的な族を考えるときには, その空間の各点に対応する表現の持つ様々な性質や不変量が, 族の中でどのように p-進的に変化していくかを捉えることが重要になる. ここでは, §4.1 で定義した一般化 Hodge-Tate 重みなどが族の中でどのように変化するかを捉えるために, Tate-Sen の理論を p-進表現の族に対して一般化した結果を [BC08] に従って紹介したい. p-進表現の p-進的な族はリジッド解析的空間上の p-進表現の族と考えられる. リジッド解析的空間はアフィノイド環と呼ばれる $\mathbb{Q}_p$ 上の Banach 環を関数環として持つアフィノイド空間で被覆されている. そこで, アフィノイド環を係数に持つ p-進ガロア表現が自然に現れる. このような状況を念頭に置き, ここでは [BC08] に従い, 次のように定義されるより一般の Banach 環係数の表現を考える. S を $\mathbb{Q}_p$-バナッハ代数とする (つまり, 完備なノルム $|-|_S:S\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ をもつ $\mathbb{Q}_p$-代数 で, 任意の $a\in\mathbb{Q}_p$, $f\in S$ に対して $|af|_S=|a|_p|f|_S$($|-|_p$ は $\mathbb{Q}_p$ の p-進絶対値) が成り立つ). $\mathfrak{X}:=\{m_x\in S|m_x$ は極大イデアル $\}$ と置き, 任意の $x\in\mathfrak{X}$ に対して $E_x:=S/m_x$ と置く.

Definition 4.15. $\mathbb{Q}_p$-バナッハ代数 S が次の条件を満たすとき, 係数環 (algebra of coefficients) と呼ぶ.

(1) S 上のノルム $|-|_S$ は次を満たす $v_S : S \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ により $|f|_S := p^{-v_S(f)}$ と定義される.
(i)$v_S(f) = \infty \leftrightarrow f = 0$.
(ii) 任意の $f, g \in S$ に対し, $v_S(fg) \geqq v_S(f) + v_S(g)$, $v_S(f+g) \geqq \inf\{v_S(f), v_S(g)\}$ が成り立つ.
(iii) 任意の $a \in \mathbb{Q}_p$ に対して $v_S(a) = v_p(a)$ が成り立つ.

(2) 任意の $x \in \mathfrak{X}$ に対して E_x は $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大.

係数環に対し, その整数環を $\mathcal{O}_S := \{x \in S | v_S(x) \geqq 0\}$ とおく.

Remark 4.16. A を $\mathbb{Q}_p$ 上のアフィノイド代数とすると, A は係数環となる.

本稿では, S 上の p-進表現の族を次のように定義する.

Definition 4.17. V が次の条件を満たすとき, V を S 上の (G_K の)p-進表現の族, と呼ぶ.

(1) V は有限自由 S-加群で G_K が連続 S-線形に作用する (ここで, V は S の直和としての位相を持つ).

(2) V の G_K の作用で閉じている有限自由 $\mathcal{O}_S$-部分加群 $T \subseteq V$ で $S \otimes_{\mathcal{O}_S} T = V$ となる T が存在する.

S 上の (G_K の)p-進表現の族の圏を, S-Rep_{G_K} と表す.

Remark 4.18. $S = E$ が $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大体の場合は (2) の条件は自動的に成り立ち, E-Rep_{G_K} は通常の E 係数の p-進表現の定義と一致する.

$V \in S$-Rep_{G_K}, $x \in \mathfrak{X}$ に対し, E_x 係数の p-進表現 $V_x := V \otimes_S E_x$ と置く. S 上の p-進表現に対して, 次の相対的な場合の Sen の定理が成り立つ.

Theorem 4.19. ([BC08]) $V \in S$-Rep_{G_K} に対し, 次が成り立つ.

(1) K の有限次拡大 K' が存在し, 十分大きな n に対して $((\mathbb{C}_p \widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p} S) \otimes_S V)^{H_{K'}}$ の $\Gamma_{K'}$ 作用で閉じている有限自由 $K'_n \otimes_{\mathbb{Q}_p} S$-加群 $D_{\mathrm{Sen}}^{K'_n}(V)$ で自然な射

$$(\mathbb{C}_p \widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p} S) \otimes_{K'_n \otimes_{\mathbb{Q}_p} S} D_{\mathrm{Sen}}^{K'_n}(V) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{C}_p \widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p} S) \otimes_S V : a \otimes x \mapsto ax$$

が同型となるものが唯一つ存在する.

(2) 任意の $x \in D_{\mathrm{Sen}}^{K'_n}(V)$ に対し,

$$\nabla_n(x) := \lim_{\gamma \to 1} \frac{1}{\log(\chi(\gamma))} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}(\gamma - 1)^k}{k}(x) \in D_{\mathrm{Sen}}^{K'_n}(V)$$

は well-defined な $K'_n \otimes_{\mathbb{Q}_p} S$ 線形写像で, さらにその特性多項式 $\det(T - \nabla_n|_{D_{\mathrm{Sen}}^{K'_n}(V)}) \in K'_n \otimes_{\mathbb{Q}_p} S[X]$ は n, K' によらない $K \otimes_{\mathbb{Q}_p} S$ 係数の多項式となる.

(3) 任意の $x \in \mathfrak{X}$ に対し, 自然な同型

$$D_{\mathrm{Sen}}^{K'_n}(V) \otimes_S E_x \xrightarrow{\sim} D_{\mathrm{Sen}}(V_x|_{G_{K'_n}})$$

が成り立つ.

Remark 4.20. この定理は, §4.1 で $\mathbb{C}_p$ に関して認めた定理 4.2, 定理 4.6 を $\mathbb{C}_p \widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p} S$ の場合へ一般化し, 後はこれら一般化された定理から §4.1 と同様な議論を S 係数の場合に行うことで証明される. より正確には, [BC08] では, 定理 4.2, 4.6, 4.7 を公理化し (TS 公理), この公理を満たしていれば §4.1 で V から $D_{\mathrm{Sen}}(V)$ の構成で行ったのと同様な議論が可能になることを証明している. さらに, [BC08] 及び [Be08] では, この TS 公理を満たす $\mathbb{C}_p$ 以外の様々な p-進周期環に対しても, 同様な構成を行い Tate-Sen 理論以外の様々な p-進表現の理論に関する定理を p-進表現の族に対して証明している.

Remark 4.21. 絶対的な場合と異なり, 定理の主張が K を有限次拡大したところでしか成り立たないのは, S 係数に対しては一般に Hilbert90 型の主張（ガロア降下（デサント））が成り立たないことが主な理由である.

Definition 4.22. $V \in S\text{-Rep}_{G_K}$ に対し, 定理 (2) で定まる $K \otimes_{\mathbb{Q}_p} S$ 係数多項式を V の Sen 多項式と呼び, $P_V(X)$ と表す.

Remark 4.23. (3) により, 任意の $x \in \mathfrak{X}$ に対し,

$$P_V(X) \otimes_S E_x = P_{V_x}(X) \in K \otimes_{\mathbb{Q}_p} E_x[X]$$

が成り立つ.

これらの変形理論への応用に関しては本報告集の山上氏の解説 [Ya] を参照. 以上で, p-進表現論入門の解説を終わりにする.

References

[An02] Y. André, Filtrations de type Hasse-Arf et monodromie p-adique, Invent. Math. 148 (2002), p. 285-317.

[Be02] L. Berger, Représentations p-adiques et équations différentielles, Invent. Math. 148 (2002), p. 219-284.

[Be04] L. Berger, An introduction to the theory of p-adic representations, Geometric Aspects of Dwork theory, Walter de Gruyter, Berlin (2004), p. 255-292.

[Be08a] L. Berger, Construction de (φ, Γ)-modules: représentations p-adiques et B-paires, Algebra and Number Theory, 2 (2008), no. 1, 91–120.

[Be08b] L. Berger, Équations différentielles p-adiques et (φ, N)-modules filtrés, Astérisque. 319 (2008), p. 13-38.

[BC08] L. Berger and P. Colmez, Familles de représentations de de Rham et monodromie p-adique, Astérisue. 319 (2008), p. 303-337.

[BerO78] P. Berthelot and A. Ogus, Notes on crystalline cohomology, Mathematical Notes, Princeton University Press, (1978).

[CC98] F. Cherbonnier and P. Colmez, Représentations p-adiques surconvergentes, Invent. Math. 133 (1998), p. 581-611.

[Co02] P. Colmez, Espaces de Banach de dimension finie, J. Inst. Math. Jussieu 1 (2002), p. 331-439.

[Co07a] P. Colmez, Représentations triangulines de dimension 2, preprint (2007).

[Co08] P. Colmez, Espaces vectoriels de dimension finie et représentations de de Rham. Astérisque. 319 (2008), p. 117-186.

[CF00] P. Colmez and J-M. Fontaine, Construction des représentations p-adiques semi-stables, Invent. Math. 140 (2000), p 1-43.

[Fa02] G. Faltings, Almost étale extensions, Astérisque 279 (2002), p. 185-270.

[Fo82] J-M. Fontaine, Sur certains types de représentations p-adiques du groupe de Galois d'un corps local; construction d'un anneau de Barsotti-Tate, Ann of Math. 115 (1982), p. 529-577.

[Fo91] J-M. Fontaine, Représentations p-adiques des corps locaux, in The Grothendieck Festschrift, vol. 2, Birkhauser, Boston, 1991, p. 249-309.

[Fo94a] J-M. Fontaine, Le corps des périodes p-adiques, Astérisque. 223 (1994), p. 59-102.

[Fo94b] J-M. Fontaine, Représentations p-adiques semi-stables, Astérisque. 223 (1994), p. 113-184.

[Fo03] J-M. Fontaine, Presque C_p-représentations, in Volume dedicated to Kazuya Kato's 50-th Birthday, Documenta Mathematica (2003), p. 285-385.

[Fo04] J-M. Fontaine, Arithmétique des représentations galoisiennes p-adiques, Astérisque. 295 (2004), p. 1-115.

[HyKa94] O. Hyodo and K. Kato, Semi-stable reduction and crystalline cohomology with logarithmic poles, Astérisque 223 (1994), p. 221-268.

[Ke04] K. Kedlaya, A p-adic local monodromy theorem, Ann of Math. (2) 160 (2004), p. 93-184.

[Ki06] M. Kisin, Crystalline representations and F-crystals, in Algebraic geometry and number theory, Progr. Math. vol 253, Birkhauser (2006), p. 459-496.

[Me04] Z. Mebkhout, Analogue p-adique du théoreme de Turrittin et le théoreme de la monodromie p-adique, Invent. Math. 148 (2002), p. 319-351.

[Mi] 三枝 洋一, エタールコホモロジーと l-進表現, 本報告集.

[Ni98] W. Niziol, Crystalline conjecture via K-theory, Ann. Sci. École. Norm. Sup. (4) 31 (1998), no 5, p. 659-681.

[Sen73] S. Sen, Lie algebras of Galois groups arising from Hodge-Tate modules, Ann of Math. 97 (1973), p. 160-170.

[Sen80] S. Sen, Continuous cohomology and p-adic Galois representations, Invent. Math. 62 (1980), p. 89-116.

[Sen88] S. Sen, The analytic variations of p-adic Hodge structure, Ann of Math. (2) 127 (1988), p. 647-661.

[Sen93] S. Sen, An infinite-dimensional Hodge-Tate theory, Bull. Soc. Math. France. 121 (1993), p. 13-34.

[Ta67] J. Tate, p-divisible groups, in Proc. Conf. Local Fields (Driebergen, 1966), Springer, 1967, p. 158-183.
[Tsu99] T. Tsuji, p-adic étale comomology and crystalline cohomology in the semi-stable reduction case. Invent. Math. 137 (1999), p. 233-411.
[Tsu02] T. Tsuji, Semi-stable conjecture of Fontaine-Jannsen: a survey. Astérisque 279, (2002), p. 323-370.
[Ya] 山上 敦士, Eigencurve について, 本報告集.