

有限体上の単純正規交叉多様体の 相互写像の核について

杉山 倫 (名大多元数理)*

本稿では有限体上のある特別な形をした単純正規交叉多様体に対する不分岐類体論の相互写像の核について得られた結果を紹介します．この原稿を書く機会を与えてくださったオーガナイザーの方々に心より感謝申し上げます．

1 序

有限体上の固有な多様体 X に対する不分岐類体論は, Lang [3] によって初めて定式化された．この理論は古典的な類体論の幾何学的な一般化であり, 古典的な類体論におけるガロア群の代わりに X のエタール基本群 $\pi_1(X)$ という群を考える． $\pi_1(X)$ は X の有限エタール被覆を統制する群であり, 例えば体 K のスペクトラム $\text{Spec}(K)$ に対しては, K の絶対ガロア群 $\text{Gal}(K^{\text{sep}}/K)$ と同型になる (cf. [5])．そして, X に対する不分岐類体論は $\pi_1(X)$ の最大アーベル商群 $\pi_1^{\text{ab}}(X)$ を X の“代数的サイクルの群”で近似するというものであり, エタール被覆と代数的サイクルという一見関わりのないように思われるものとは関係する点に一つの面白さがある．

理論の主な内容は, 次の相互写像と呼ばれる標準的な準同型写像 ρ_X の存在とその様子 (どのくらい近似できているかを表す) にまとめられる:

$$\rho_X : CH_0(X) \longrightarrow \pi_1^{\text{ab}}(X).$$

左辺は X の 0-サイクルのチャウ群であり, 正確には次のように定義される:

$$CH_0(X) := \text{Coker} \left(\partial_1 : \bigoplus_{x \in X^{d-1}} \kappa(x)^\times \longrightarrow \bigoplus_{x \in X^d} \mathbb{Z} \right) \quad (d = \dim X).$$

ここで, ∂_1 は離散付値によって定義される写像であり, 自然数 r に対して X^r は余次元 r の点の集合を表す． $\kappa(x)^\times$ は x における剰余類体 $\kappa(x)$ の乗法群である．今の場合, X^d は X の閉点全体の集合と一致している．

相互写像 ρ_X は閉点 x の類を x での Frobenius 置換に対応させる写像であり, 次の事実が知られている:

* rin-sugiyama@math.nagoya-u.ac.jp

- X が正規のとき, 稠密な像をもつ [3].
- X がスムーズなとき, 単射である [2].
- ρ_X が単射でないような射影的で正規な曲面 X が存在する [4].
- 有限体上固有な単純正規交叉曲面 X に対して, 次の完全列がある [1]:

$$H_2(\Gamma_X, \mathbb{Z}/n) \xrightarrow{\epsilon_{X,n}} CH_0(X)/n \xrightarrow{\rho_X/n} \pi_1^{ab}(X)/n \longrightarrow H_1(\Gamma_X, \mathbb{Z}/n) \longrightarrow 0. \quad (1.1)$$

ここで, 自然数 n と Abel 群 A に対して, A/n は n 倍写像の余核を表し, Γ_X は X の双対グラフと呼ばれる有限単体的複体である (定義 2.2, Example 2.3 参照).

Remark 1.1. 曲線に対して同様の完全列の存在は, Kato-Saito [2] によって示されている. 曲線の場合, 最初の群が消えているため, ρ_X/n は単射である. また, 一般次元の単純正規交叉多様体に対しても同様の完全列が存在する.

完全列 (1.1) より, $\text{Ker}(\rho_X/n)$ は単純正規交叉曲面 X の双対グラフの第 2 ホモロジー群 $H_2(\Gamma_X, \mathbb{Z}/n)$ が統制していることがわかる. しかし, $\epsilon_{X,n}$ という写像は一般に非常に抽象的であり, そのままでは具体的に計算することが困難である.

- 有限体 k 上の単純正規交叉曲面 S で, 写像 ρ_S/n は単射ではないが, 十分大きな任意の有限次拡大 E/k に対して, 係数拡大した曲面 $S \otimes E$ の写像 $\rho_{S \otimes E}/n$ が単射になるものが構成できる [6].

著者は上記の事実を受けて, 相互写像の非単射性の潜在性 (ここでは有限次係数拡大で変化しない性質をいう) を探るため, 次の問題を考えた:

問題 有限体 k 上の単純正規交叉曲面で, 任意の有限次拡大 F/k に対して, 写像 $\rho_{Y \otimes F}/n$ が単射にならないようなものは存在するか?

この問いに対する解答が主結果 (Example 3.2) である.

2 単純正規交叉多様体と双対グラフ

ここでは単純正規交叉多様体の定義および双対グラフの定義を復習する.

定義 2.1 (単純正規交叉多様体). X を体 k 上有限型で同次元的なスキームとする. このとき, X が k 上の 正規交叉多様体 であるとは, 次を満たすときをいう: X は k 上分離的であり, いたるところエタール局所的に次のアフィンスキームと同型である;

$$\text{Spec}(k[T_0, \dots, T_d]/(T_0 T_1 \cdots T_r)) \quad (0 \leq r \leq d = \dim X).$$

さらに正規交叉多様体 X が 単純 であるとは, X のすべての既約成分が k 上スムーズであるときをいう.

定義 2.2 (双対グラフ (cf. [1], [4])). X を k 上 d 次元の単純正規交叉多様体とする. X の双対グラフと呼ばれる有限単体的複体 Γ_X を次のように定義する:

$\{X_i\}_{i \in I}$ を X の既約成分全体の集合とし, I 上の順序を一つ固定する. まず, 次の記号を導入する; 正の整数 r に対して,

$$X^{(r)} := \coprod_{\{i_1, i_2, \dots, i_r\} \subset I} X_{i_1} \times_X X_{i_2} \times_X \cdots \times_X X_{i_r}.$$

このとき, Γ_X の r -単体 $\mathfrak{S}_r$ を $X^{(r)}$ の既約成分全体の集合と定め, r -単体の向き付けを I の順序によって r について帰納的に定める.

Example 2.3. k を有限体とする.

(1) X を単純正規交叉曲線 $T_0 T_1 S_0 S_1 = 0 \subset \mathbb{P}_k^1 \times_k \mathbb{P}_k^1$ とする. このとき, X の双対グラフは次の完全列をなす:

$$0 \longrightarrow H_1(\Gamma_X, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}^{\oplus 4} \longrightarrow \mathbb{Z}^{\oplus 4} \longrightarrow H_0(\Gamma_X, \mathbb{Z}) \longrightarrow 0.$$

X が連結であることから, $H_0(\Gamma_X, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ を得る. さらに階数を計算することで, $H_1(\Gamma_X, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ が従う. このとき, 類体論の相互写像については次のようになる:

$$0 \longrightarrow CH_0(X) \xrightarrow{\rho_X} \pi_1^{ab}(X) \longrightarrow \hat{\mathbb{Z}} \longrightarrow 0$$

(2) X を単純正規交叉曲面 $T_0 T_1 T_2 T_3 = 0 \subset \text{Proj}(k[T_0, T_1, T_2, T_3]) = \mathbb{P}_k^3$ とする. このとき, X の双対グラフのホモロジー群は次のように計算できる:

$$H_2(\Gamma_X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}, \quad H_1(\Gamma_X, \mathbb{Z}) = 0, \quad H_0(\Gamma_X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}.$$

また, この X に対する列 (1.1) は次のようになる:

$$\mathbb{Z}/n \xrightarrow{\epsilon} CH_0(X)/n \xrightarrow{\rho_X/n} \pi_1^{ab}(X)/n \longrightarrow 0$$

ここで, ϵ は零写像である. この単純正規交叉曲面 X は $H_2(\Gamma_X, \mathbb{Z}/n)$ は消えていないが, 相互写像は係数拡大しても常に単射となる例である.

3 主結果

ここでは, 有限体上の特別な形をした単純正規交叉多様体の相互写像の核について得られた結果, および係数拡大しても相互写像が単射にならによる単純正規交叉曲面の例を紹介する (cf. [7]).

Y_0 を有限体 k 上射影的かつスムーズで幾何的に既約な多様体とし, D を Y_0 上の単純正規交叉因子とする. $O := (0 : 1), \infty := (1 : 0) \in \mathbb{P}_k^1$ とおき, 次の単純正規交叉多様体を考える:

$$Y := \underbrace{(Y_0 \times_k O) \cup (Y_0 \times_k \infty) \cup (D \times_k \mathbb{P}_k^1)} \subset Y_0 \times_k \mathbb{P}_k^1.$$

この Y に対して, エタールホモロジーに関するスペクトル系列より次の完全可換図式

が得られる：

$$\begin{array}{ccccccc}
CH_0(D)/n & \longrightarrow & CH_0(Y_0)/n^{\oplus 2} & \longrightarrow & CH_0(Y)/n & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow \simeq & & \downarrow \rho_Y/n & & \\
\pi_1^{ab}(D)/n & \longrightarrow & \pi_1^{ab}(Y_0)/n^{\oplus 2} & \longrightarrow & \pi_1^{ab}(Y)/n & & \\
\downarrow & & & & & & \\
H_1(\Gamma_D, \mathbb{Z}/n) & & & & & &
\end{array}$$

この図式より得られる写像 $\delta_n : H_1(\Gamma_D, \mathbb{Z}/n) \rightarrow CH_0(Y)/n$ の射影極限をとることで、
像が $\text{Ker}(\rho_Y)$ (有限群である) と一致するような写像

$$\delta_Y : H_1(\Gamma_D, \mathbb{Z}) \longrightarrow CH_0(Y)$$

を構成することができる．そして、次のように定義する $\text{Ker}(\rho_Y)$ の部分群 $G(Y)$ が研究対象である：

$$G(Y) := \text{Im}(\delta_Y \circ \sigma).$$

ここで、 $\sigma : H_1(\Gamma_{\overline{D}}, \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(\Gamma_D, \mathbb{Z})$ は双対グラフのノルム写像である．ただし、 $\overline{D} := D \otimes_k k^{sep}$ である．

次に、 $G(Y)$ を記述するための写像を定義する．

ℓ を素数とする． $\overline{D}_j$ は $\overline{D}$ の既約成分をとり、 $\overline{Y}_0 := Y_0 \otimes_k k^{sep}$ とする．このとき、 $G_k := \text{Gal}(k^{sep}/k)$ -加群 $\Theta_\ell := \text{Coker}(\bigoplus_j \pi_1^{ab}(\overline{D}_j)^{pro-\ell} \rightarrow \pi_1^{ab}(\overline{Y}_0)^{pro-\ell})$ と、次の完全可換図式から引き起こされる G_k -同変な写像 $\alpha^{(\ell)} : H_1(\Gamma_{\overline{D}}, \mathbb{Z}_\ell) \rightarrow \Theta_\ell$ を考える：

$$\begin{array}{ccccccc}
\pi_1^{ab}(\overline{D}^{(1)})^{pro-\ell} & \longrightarrow & \pi_1^{ab}(\overline{D})^{pro-\ell} & \longrightarrow & H_1(\Gamma_{\overline{D}}, \mathbb{Z}_\ell) & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 \longrightarrow & \pi_1^{ab}(\overline{Y}_0)^{pro-\ell} & \xrightarrow{id} & \pi_1^{ab}(\overline{Y}_0)^{pro-\ell} & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

定理 3.1 ([7]). ℓ を素数とする．

(1) $G(Y)$ の ℓ 部分 $G(Y)\{\ell\}$ は $(\Theta_\ell)_{tors}$ の部分商である．

(2) 次の二つを仮定する：

(i) $Y^{(2)}$ の各既約成分は k -有理点を持つ、(ii) G_k は $(\Theta_\ell)_{tors}$ に自明に作用する．

このとき、 $G(Y)\{\ell\}$ は $\alpha^{(\ell)}$ の像と一致する．

この定理で注目する点は、相互写像の核の部分群 $G(Y)$ が係数拡大によらない写像 α の像で表せるということである．特に定理の仮定の下で、 $\text{Im}(\alpha)$ が消えていなければ、相互写像 ρ_Y は Y を任意に有限次係数拡大しても単射でないことがわかる．

定理 3.1(2) の証明の概略を述べる．

群 $G(Y)$ が有限群であることから, $G(Y)\{\ell\}$ は写像 $(\delta_Y \circ \sigma)^{(\ell)} : H_1(\Gamma_{\overline{D}}, \mathbb{Z}) \rightarrow A_0(Y) \rightarrow A_0(Y)^{(\ell)}$ の像と同一視される. ここで, $A_0(Y)^{(\ell)}$ は $A_0(Y)$ の最大 ℓ 商群を表す.

写像の構成の仕方および定理の (1) から, 写像 $(\delta_Y \circ \sigma)^{(\ell)}$ が α を用いて次のように分解される:

$$H_1(\Gamma_{\overline{D}}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\alpha^{(\ell)}} (\Theta_\ell)_{tors} \xrightarrow{f_1} ((\Theta_\ell)_{tors})_{G_k} \xrightarrow{f_2} (\Theta_\ell)_{G_k} \xrightarrow{\eta^{(\ell)}} A_0(Y)^{(\ell)}. \quad (3.1)$$

ここで, $\eta^{(\ell)}$ は次の合成写像を表す:

$$\begin{aligned} (\Theta_\ell)_{G_k} &\simeq \text{Coker}(\pi_1^{geo}(D^{(1)})^{pro-\ell} \rightarrow \pi_1^{geo}(Y_0)^{pro-\ell}) \\ &\simeq \text{Coker}(A_0(D^{(1)})^{(\ell)} \rightarrow A_0(Y_0)^{(\ell)}) \\ &\xrightarrow{(*)} \text{Coker}(A_0(D)^{(\ell)} \rightarrow A_0(Y_0)^{(\ell)}) \\ &\xrightarrow{inj.} A_0(Y)^{(\ell)}. \end{aligned}$$

定理の仮定 (ii) の下で, 重さの議論により合成写像 $f_2 \circ f_1$ が単射であることが示せる. また仮定 (i) より, 写像 $\eta^{(\ell)}$ の $(*)$ が同型であることが証明され, $\eta^{(\ell)}$ は単射となる. 従って, $G(Y)\{\ell\}$ と $\alpha^{(\ell)}$ の像が一致する.

Example 3.2 (係数拡大しても相互写像が単射にならない例 (cf. [4, 7])). $n > 1$ を $(n, 6 \cdot ch(k)) = 1$ となる自然数とし, k は 1 の原始 n 乗根 ζ を含む有限体とする. V を Fermat 曲面 $T_0^n + T_1^n + T_2^n + T_3^n = 0 \subset \mathbb{P}_k^3$ とし, V 上の自由な作用

$$\tau : (T_0 : T_1 : T_2 : T_3) \mapsto (T_0 : \zeta T_1 : \zeta^2 T_2 : \zeta^3 T_3)$$

を考える. このとき, $Y_0 := V / \langle \tau \rangle$ は射影的かつスムーズな曲面であり,

$$\pi_1^{ab}(\overline{Y_0}) \simeq \langle \tau \rangle \simeq \mathbb{Z}/n$$

が成り立つ. なぜなら, $\overline{V}$ は射影空間 $\mathbb{P}_{k^{sep}}^3$ の超曲面であり, $\pi_1^{ab}(\overline{V}) \simeq \pi_1^{ab}(\mathbb{P}_{k^{sep}}^3) = 0$ となるからである (cf. [6, Lemma 3.5.]).

次に V 上の $2n$ 本の直線を考える: $j = 1, \dots, n-1$

$$L_1 : T_0 + T_1 = T_2 + T_3 = 0, \quad L_1^{\tau^j} : T_0 + \zeta^j T_1 = T_2 + \zeta^j T_3 = 0,$$

$$L_2 : T_0 + T_1 = T_2 + \zeta T_3 = 0, \quad L_2^{\tau^j} : T_0 + \zeta^j T_1 = T_2 + \zeta^{j+1} T_3 = 0.$$

このとき, $L := L_1 \cup L_2 \cup L_1^{\tau^1} \cup \dots \cup L_1^{\tau^{n-1}} \cup L_2^{\tau^{n-1}}$ は V 上の連結単純正規交叉因子であり, τ の作用で安定である.

$\varphi : V \rightarrow Y_0$ を自然な射とし, $C_i = \varphi_*(L_i)$ ($i = 1, 2$) とすると, C_i は Y_0 上の非特異有理曲線であり, $D := C_1 \cup C_2$ は Y_0 上の単純正規交叉因子となる.

このとき, φ は完全分解被覆 $L \rightarrow D$ を引き起こすことから, $\alpha : H_1(\Gamma_{\overline{D}}, \mathbb{Z}) \rightarrow \pi_1^{ab}(\overline{Y})$ は全射となる. 今, D の既約成分が非特異有理曲線であることに注意すると, $\Theta = \pi_1^{ab}(\overline{Y})$

である．したがって，

$$\mathrm{Im}(\alpha) \simeq \mathbb{Z}/n.$$

以上の計算と定理 3.1 より，単純正規交叉曲面 $Y := (Y_0 \times_k O) \cup (Y_0 \times_k \infty) \cup (D \times_k \mathbb{P}^1)$ は任意の有限次拡大 F/k に対し，相互写像 $\rho_{Y \otimes_k F}$ が単射にならない曲面であることがわかる．さらに， $\rho_{Y \otimes_k F}/n : CH_0(Y \otimes_k F)/n \longrightarrow \pi_1^{ab}(Y \otimes_k F)/n$ の核も $\mathbb{Z}/n$ と同型になることがわかり，単射にならない．

Remark 3.3. より高次元の単純正規交叉多様体で相互写像が係数拡大しても単射にならないようなものは，スムーズな多様体と上の例の単純正規交叉曲面 Y とのファイバー席を取ることによって得ることができる． X を k 上固有かつスムーズで，幾何的に既約な多様体とする．このとき，次の可換図式が存在する：

$$\begin{array}{ccccc} H_2(\Gamma_{Y \times X}, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\delta_{Y \times X}} & CH_0(Y \times X) & \xrightarrow{\rho_{Y \times X}} & \pi_1^{ab}(Y \times X) \\ \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ H_2(\Gamma_Y, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\delta_Y} & CH_0(Y) & \xrightarrow{\rho_Y} & \pi_1^{ab}(Y). \end{array}$$

ここで， δ_Y は係数拡大をしても零写像ではないから， $\delta_{Y \times X}$ も係数拡大しても零写像ではない．よって，相互写像 $\rho_{Y \times X}$ は係数拡大をしても単射ではない．

参考文献

- [1] U. Jannsen, S. Saito, Kato homology of arithmetic schemes and higher class field theory over local fields, Documenta Math, (Extra Volume : Kazuya Kato's Fiftieth Birthday) (2003) 479-538.
- [2] K. Kato, S. Saito, Unramified class field theory for arithmetic surfaces, Ann. of Math. **118** (1983) 241-274.
- [3] S. Lang, Unramified class field theory over function fields in several varieties, Ann. of Math. **64** (1956) 285-325.
- [4] K. Matsumi, K. Sato, M. Asakura, On the Kernel of the Reciprocity Map of Normal Surfaces over Finite Fields, *K-Theory* **18** (1999) 203-234.
- [5] J. S. Milne, *Étale Cohomology*, Princeton University Press, Princeton (1980).
- [6] K. Sato, Non-divisible cycles on surfaces over local fields, J. Number Theory **114** (2005) 272-297.
- [7] R. Sugiyama, On the kernel of reciprocity map of simple normal crossing varieties over finite fields, preprint, arXiv:0911.5065