肥田理論の紹介

大阪大学　落合理

肥田晴三氏によって創始された肥田理論の概説を行いたい. 肥田理論を解説している日本語の教科書が未だ存在しないために, なるべく理論の意味や全貌が見えるように努めた. ただ, 紙数や準備時間の制約から教科書と同程度の子細までは書けなかった. 同時に, 流れを見やすくすることを優先して敢えて厳密性を捨てた点もある. それでも肥田理論の概要をとらえていただくための最初のきっかけになることを期待したい. そして, 一般化などの発展的な内容やより正確な証明を知りたい方のためにこの記事の最後に, (筆者の理解している範囲でのコメントを加えた[1])「コメント付き参考文献リスト」を用意した. 合わせて利用していただければ幸いである.

Contents

1. 導入

p を素数として以下固定する. この論説を通して, 有理数体 $\mathbb{Q}$ の代数閉包 $\overline{\mathbb{Q}}$ の p 進埋め込み $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$ 及び複素埋め込み $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$ を固定しておく. これによって, 例えば

[1]筆者の不理解によって間違った記述などもあるかもしれません. 何かありましたらお知らせください.

$\mathbb{Q}_p$ の絶対ガロア群 $G_{\mathbb{Q}_p}$ が自然に $\mathbb{Q}$ の絶対ガロア群 $G_{\mathbb{Q}}$ の p での分解群と同一視されることに注意したい.

1.1. **ラマヌジャンのモジュラー形式 Δ の具体例を通した肥田理論の紹介.** Ramanujan によるよく知られた重さ 12 のカスプ形式 Δ は以下のような q-展開 $\Delta(q)$ をもつ:

$$\Delta(q) = q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24} \in S_{12}(SL_2(\mathbb{Z})).$$

以下, Δ は p において**通常的 (ordinary)** (つまり, q-展開の p 係数 $a_p(\Delta)$ は p 進単数) とする. $p = 11$ が $a_p(\Delta)$ が p 進単数となる最小の素数である. $p \geq 11$ ではかなり大きな素数 p まで $a_p(\Delta)$ が計算されている. 計算で確かめられている範囲内では $p = 2411$ 以外ではすべて条件をみたしているようである. このとき, $X^2 - a_p(\Delta)X + p^{11} = 0$ の根のうち p 進単数であるものを α, そうでないものを β とし,

$$\Delta^* \in S_{12}(\Gamma_0(p))$$

を $\Delta^*(q) = \Delta(q) - \beta\Delta(q^p)$ とおく. ここで, 以下

$$\Gamma_0(M) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \middle| c \equiv 0 \mod M \right\}$$
$$\Gamma_1(M) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(M) \middle| a \equiv 1 \mod M \right\}$$

とすることを注意しておきたい. $\Delta^* \in S_{12}(\Gamma_0(p))$ は全ての素数 $l \neq p$ におけるヘッケ作用素 T_l と U_p 作用素に関して固有ベクトルとなっており[2],

$$\begin{cases} T_l(\Delta^*) = a_l(\Delta)\Delta^* & l \text{ が } p \text{ と異なる素数のとき} \\ U_p(\Delta^*) = \alpha\Delta^* & l = p \text{ のとき} \end{cases}$$

となる. 一般に, レベルが p と素な固有形式 f をレベルが p で割れる固有空間に埋め込んで, 選んだパラメーター α を U_p 作用の固有値にもつ固有形式 f_α を選ぶ操作を ***p*-安定化 (*p*-stabilisation)** とよぶ. 逆に, レベルが p で割れるモジュラー形式の空間における固有形式は, それに付随する newform のレベルが p と素な場合は必ずこのようにして oldform から p-安定化をとる操作によって得られる. 勝手な素数 $l \neq p$ でのヘッケ作用考えると, p-安定化で得られたモジュラー形式 f_α は元のモジュラー形式 f と同じ固有値をもち本質的な情報は変わらない. 一方で, 肥田理論や岩澤理論などの p 進理論においてモジュラー形式を扱うためにはヘッケ作用素 U_p に関する整合性やそれ以外の表示の便宜性の理由からもレベルが p で割れていた方が都合がよいのである. よって, しばしば p-安定化されたモジュラー形式を考えるのである.

今, 通常的岩澤代数 (ordinary Iwasawa algebra) $\Lambda_{\mathrm{ord}} := \mathbb{Z}_p[[\Gamma_{\mathrm{ord}}]]$ を考える. ここで Γ_{ord} は,

$$\varprojlim_r \Gamma_0(p^r)/\Gamma_1(p^r) \cong \mathbb{Z}_p^\times$$

[2] $\Delta(q)$, $\Delta(q^p)$ はともに $S_{12}(\Gamma_0(p))$ においては p でのヘッケ作用素で固有ベクトルでない.

の p-Sylow 部分群であり, 標準的な同型 $\chi_{\mathrm{ord}}:\ \Gamma_{\mathrm{ord}} \xrightarrow{\sim} 1+p\mathbb{Z}_p$ がある. Γ_{ord} はモジュラー曲線 $X_1(p^r)$ やモジュラー形式の空間 $S_k(\Gamma_1(p^r))$ など様々なモジュラー的な対象に作用する. 次節の最後の方で述べる肥田理論の一般的な状況での主定理を Δ に関する特別な場合に当てはめると次が成り立つ[3].

定理 1.1 (肥田理論の Λ-進ガロア表現版)**.** *$G_{\mathbb{Q}}$ の連続な作用 $\widetilde{\rho}$ をもつ加群 $\mathbb{T}^{\mathrm{ord}} \cong \Lambda_{\mathrm{ord}}^{\oplus 2}$ で次を満たすものが存在する.*

(1) $\widetilde{\rho}$ は $\{p,\infty\}$ の外不分岐であり, $\widetilde{\rho}\otimes \mathrm{Frac}(\Lambda_{\mathrm{ord}}):\ G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow GL_2(\mathrm{Frac}(\Lambda_{\mathrm{ord}}))$ は既約表現となる.
(2) 各整数 $k \geq 2$ に対して, Δ^* と $\bmod\ p$ で合同な正規化された固有形式 $f_k \in S_k(\Gamma_1(p))$ が一意的に存在して, $\mathbb{T}^{\mathrm{ord}} \underset{\Lambda_{\mathrm{ord}}}{\otimes} \chi_{\mathrm{ord}}^{k-2}(\Lambda_{\mathrm{ord}})$ は f_k に付随した p 進ガロア表現 V_{f_k} と同型である.
(ここで, 環準同型 $\chi_{\mathrm{ord}}^{k-2}: \Lambda_{\mathrm{ord}} \longrightarrow \mathbb{Q}_p$ を, 指標 $\chi_{\mathrm{ord}}^{k-2}: \Gamma_{\mathrm{ord}} \longrightarrow \mathbb{Q}_p^{\times}$ を自然に延長して得られるものとする. また, $f_{12} = \Delta^*$ であることに注意)
(3) $G_{\mathbb{Q}_p}$ に作用 $\widetilde{\rho}$ を制限するとガロア表現は

$$0 \longrightarrow (\mathbb{T}^{\mathrm{ord}})^+ \longrightarrow \mathbb{T}^{\mathrm{ord}} \longrightarrow (\mathbb{T}^{\mathrm{ord}})^- \longrightarrow 0$$

なるフィルトレーションをもつ. 但し, $(\mathbb{T}^{\mathrm{ord}})^+$, $(\mathbb{T}^{\mathrm{ord}})^-$ はともに Λ_{ord} 上の階数 1 の自由加群である. また, $(\mathbb{T}^{\mathrm{ord}})^+$ への $G_{\mathbb{Q}_p}$ の作用は不分岐であり, その作用を与える不分岐指標 $\widetilde{\alpha}:\ G_{\mathbb{Q}_p} \longrightarrow (\Lambda_{\mathrm{ord}})^{\times}$ に対して, $A_p = \widetilde{\alpha}(\mathrm{Frob}_p) \in \Lambda_{\mathrm{ord}}$ は任意の $k \geq 2$ で $A_p \equiv a_p(f_k) \bmod (\gamma - \chi_{\mathrm{ord}}^{k-2}(\gamma))$ を満たす. 但し, Frob_p は p での幾何的フロベニウス, γ は Γ_{ord} の位相的生成元とする.

1.2. **肥田理論の影響.** 80 年代の前半に得られたこのようなガロア群のモジュラーな p 進表現の族の構成結果 (最初に発表されたのは [Hi86a], [Hi86b]) は, ガロア表現の観点からは例えば次のようなインパクトがあった.

(1) Λ_{ord} の極大イデアルを $\mathfrak{M}$ としたとき, 剰余表現 $\mathbb{T}^{\mathrm{ord}} \otimes_{\Lambda_{\mathrm{ord}}} \Lambda_{\mathrm{ord}}/\mathfrak{M}$ の無限小変形 $\mathbb{T}^{\mathrm{ord}} \otimes_{\Lambda_{\mathrm{ord}}} \Lambda_{\mathrm{ord}}/\mathfrak{M}^r$ $(r \geq 1)$ 達の普遍族が $\mathbb{T}^{\mathrm{ord}}$ である. つまり, 代数幾何や複素幾何における「変形理論」と同じようなとらえ方ができる. 実際, 肥田理論に触発されたことで, Mazur による「ガロア表現の変形理論」([M89] 参照) が誕生する.
(2) 肥田理論のガロア表現の視点からの面白さとして次の結果にも注目したい. ([MW86] の §12 Proposition 1 を参照)

命題 1.2. $p \neq 11, 23, 691$ なる Δ の通常的素数をとる. このとき, Ramanujan のカスプ形式 Δ から得られたガロア表現

$$G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\Lambda_{\mathrm{ord}}}(\mathbb{T}^{\mathrm{ord}}) \cong GL_2(\mathbb{Z}_p[[X]])$$

の像は $SL_2(\mathbb{Z}_p[[X]])$ を含む.

[3] $\dim_{\mathbb{Q}} S_{12}(SL_2(\mathbb{Z})) = 1$ である特殊事情などを考慮して, 一般論より強い主張となっている.

注意 1.3. 有理数体の絶対ガロア群のこのように巨大な像をもつ表現の構成があることは, 肥田理論以前には知られていなかったのではないかと思われる. 例えば, 普通の p 進表現 $T \cong \mathbb{Z}_p^2$ で

$$G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}_p}(T) \cong GL_2(\mathbb{Z}_p)$$

の像が $SL_2(\mathbb{Z}_p)$ を含むものをとり, $\mathbb{T} = T \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[[\Gamma_{\mathrm{cyc}}]](\widetilde{\chi}_{\mathrm{cyc}})$ (Γ_{cyc} は円分 $\mathbb{Z}_p$-拡大 $\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q}$ のガロア群, $\mathbb{Z}_p[[\Gamma_{\mathrm{cyc}}]](\widetilde{\chi}_{\mathrm{cyc}})$ は指標 $\widetilde{\chi}_{\mathrm{cyc}} : G_{\mathbb{Q}} \twoheadrightarrow \Gamma_{\mathrm{cyc}} \hookrightarrow \mathbb{Z}_p[[\Gamma_{\mathrm{cyc}}]]^\times$ による作用をもつ階数 1 の自由 $\mathbb{Z}_p[[\Gamma_{\mathrm{cyc}}]]$-加群) を考えると

$$G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\Lambda_{\mathrm{ord}}}(\mathbb{T}) \cong GL_2(\mathbb{Z}_p[[X]])$$

には, $P(X) \in \mathbb{Z}_p[[X]]$ が非定数のときの $\begin{pmatrix} 1 & P(X) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}_p[[X]])$ なる元は像に含まれない.

1.3. **肥田理論の三面性.** 厳密な話ではないが, 肥田理論の証明や理論の定式化は

(i) 「ガロア表現の変形による肥田理論」
(ii) 「p 進モジュラー形式の変形による肥田理論」
(iii) 「p 進ヘッケ環の変形による肥田理論」

という違った方向のアプローチがあるように思われる. 定理 1.1 で与えた方向性は (i) に他ならない. また 3 通りの表現の仕方の関係は以下のように説明される.

(i)⇒ (ii)

モジュラーガロア表現のトレースはモジュラー形式のフーリエ係数を与えることから導かれる. 実際, 全ての素数 l に対して,

$$A_l = \begin{cases} \mathrm{Tr}(\widetilde{\rho}(\mathrm{Frob}_l)) & l \neq p \\ \widetilde{\alpha}(\mathrm{Frob}_p) & l = p \end{cases}$$

かつ

$$A_{l^{e+1}} = \begin{cases} A_l A_{l^e} - l\langle l \rangle [\bar{l}]^{10} A_{l^{e-1}} & l \neq p \\ (A_p)^{e+1} & l = p \end{cases}$$

と定める. 但し, $\bar{l} \in \mathbb{F}_p$ は mod p であり, $[\bar{l}] \in \mathbb{Z}_p^\times$ は Teichmuller lift をあらわす. また, $\langle l \rangle \in \Gamma_{\mathrm{ord}}$ は, $\chi_{\mathrm{ord}}(\langle l \rangle) = l[\bar{l}]^{-1} \in 1 + p\mathbb{Z}_p$ なる一意的な元である.

$(m, m') = 1$ なる自然数 m, m' たちに対しては $A_{mm'} = A_m A_{m'}$ と定めることで勝手な自然数について $A_n \in \mathbb{Z}_p[[\Gamma_{\mathrm{ord}}]]$ が定まる.

これらは, おのおのの $k \geq 2$ で特殊化すると定理 1.1 であらわれた重さ k のモジュラー形式 f_k に対するフーリエ形式の乗法関係の式と同じ関係を与えるようなものを形式的に与えたものであることは容易にみてとれる. したがって, 定理 1.1 から次の定理がしたがう :

定理 1.4 (肥田理論の Λ-進カスプ形式版)**.** 形式的な q-展開 $\mathcal{F} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} A_n q^n$ が存在して, 次をみたす :

(a) 勝手な $k \geq 2$ に対して, $\chi_{\mathrm{ord}}^{k-2}(\mathcal{F}) \in \mathbb{Z}_p[[q]]$ は $a_p(f_k)$ が p 進単数となる固有カスプ形式 $f_k \in S_k(\Gamma_1(p))$ を与える.
(b) 重さ $k=12$ における特殊化 $\chi_{\mathrm{ord}}^{10}(\mathcal{F}) \in \mathbb{Z}_p[[q]]$ は $\Delta^*(q)$ と一致する.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii)
一般的に (古典的な設定または p-進的な設定において) 環 R 上のヘッケ環 H と環 R 上モジュラー形式の空間 M との非退化なペアリング:

$$H \times M \longrightarrow R, \quad (T, f) \mapsto a_1(f|_T)$$

($T \in H$ はヘッケ作用素, $f \in M$ はモジュラー形式, $a_n(f)$ は q-展開の係数)

がある. このことから

「p 進ヘッケ環の変形による肥田理論」

$\Longleftrightarrow$「p 進モジュラー形式の変形による肥田理論」

なる同値がある.
(iii) $\Rightarrow$ (i)
一般に, 志村, Deligne らによって重さ k の楕円モジュラー形式 f_k に付随するガロア表現 V_{f_k} が構成されている. (V_{f_k} の説明に関しては, 本報告集の記事 [Ch], [Yo1] を参照のこと)
今次のことに注意したい.

- V_{f_k} の性質より, 各重さ k でのガロア表現 V_{f_k} への不分岐素数 l におけるフロベニウスの作用の跡や行列式が l でのヘッケ作用素で表されている.
- 肥田のヘッケ環の存在 (設定 (iii)) によって, 重さ k が変動するときにすべての不分岐素数 l でのヘッケ作用素が p 進補間されている.

ガロア表現の概念を弱めた**擬 (ガロア) 表現 (pseudo representation)** という概念がある. 非常に粗く言うと擬ガロア表現はガロア表現における跡や行列式の情報だけを取り出したものである. 上のことより擬表現は既に p-adic family をなしている. さて, 「2 次元の擬表現で odd なものは本当の表現から来ている」という擬表現の理論の主結果がある. (これは, Wiles [Wi88] によって得られた結果であり, 教科書 [H93] の §7.5 などにも説明がある. また本報告集の山上氏の記事 [Ya] も参照のこと) この擬表現の理論によって, 設定 (iii) から設定 (i) が従うことがわかる.

1.4. **Eisenstein 級数からなる肥田変形.**

注意 1.5. 今まで, (あまりはっきりと強調しなかったが) カスプ形式だけに注目して肥田理論をみてきた. しかし一般に

(楕円モジュラー形式の空間) = (楕円カスプ形式の空間) $\oplus$ (Eisenstein 級数の空間)

なる分解がある.
　肥田理論を考えるとき, Eisenstein 級数に関するガロア表現は Chebotarev の密度定理などによる一意性がないため, モジュラー形式全体において上記の視点 (i) の定式化を考えることには少し曖昧さがある. 一方で, 上記の視点 (ii) と (iii) は, 「楕円

モジュラー形式全体の空間のヘッケ環」または「楕円カスプ形式の空間のみのヘッケ環」を選択すれば, どちらも定式化が可能である.

(ii) の視点において楕円モジュラー形式全体の肥田理論が考えられることをみるために, Eisenstein 級数の空間たちが p 進連続な族 (あるいは Λ 進連続な族) をなすことを以下で直接的に確かめたい. ω を Teichmuller 指標とする. つまり, ω は, $g \mapsto \zeta_p^{\omega(g)}$ で定まるガロア指標 $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_p)/\mathbb{Q}) \longrightarrow (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ に対応するディリクレ指標である.

例として, p と素な導手 N をもつディリクレ指標 ψ に対して, 重さ $k \geq 2$ で指標 $\psi\omega^{a-k}$ の p-stabilized Eisenstein 級数

$$E'_k(\psi\omega^{a-k}) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2\setminus(0,0)} \frac{(\psi\omega^{a-k})^{-1}(n)}{(mNpz+n)^k} & p-1 \nmid k-a \text{ のとき} \\ \displaystyle\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2\setminus(0,0)} \frac{\psi^{-1}(n)}{(mNz+n)^k} \text{ の } p\text{-安定化} & p-1 | k-a \text{ のとき} \end{cases}$$

を全ての $k \geq 2$ で考える. ここで a としては $0 < a < p-1$ なる偶数を勝手に選び固定しておく. 勝手な導手 N' のディリクレ指標 ψ' に対して, ガウス和を $G(\psi') = \displaystyle\sum_{1\leq j\leq N'} \psi'(j)\exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}j}{N'}\right)$ とする.

$$E_k(\psi\omega^{a-k}) = \begin{cases} \dfrac{(Np)^k}{2} G(\psi^{-1}\omega^{k-a})^{-1} \dfrac{(k-1)!}{(-2\pi\sqrt{-1})^k} E'_k(\psi\omega^{a-k}) & p-1 \nmid k-a \text{ のとき} \\ \dfrac{N^k}{2} G(\psi^{-1}\omega^{k-a})^{-1} \dfrac{(k-1)!}{(-2\pi\sqrt{-1})^k} E'_k(\psi\omega^{a-k}) & p-1 | k-a \text{ のとき} \end{cases}$$

とおくと, $E_k(\psi\omega^{a-k})$ の q-展開は

$$E_k(\psi\omega^{a-k}) = \begin{cases} \dfrac{\zeta(1-k,\psi\omega^{a-k})}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1,\psi\omega^{a-k}}(n) q^n & p-1 \nmid k-a \text{ のとき} \\ \dfrac{(1-\psi(p)p^{k-1})\zeta(1-k,\psi)}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sigma'_{k-1,\psi}(n) q^n & p-1 | k-a \text{ のとき} \end{cases}$$

で与えられる. 但し, ψ' をディリクレ指標とするとき, $\sigma_{k-1,\psi'}(n)$ は指標付きの Dedekind の σ 函数

$$\sigma_{k-1,\psi'}(n) = \sum_{0<d|n} \psi'(d) d^{k-1}$$

であり, $\sigma'_{k-1,\psi'}(n)$ は上のような和において $(d,p)=1$ なる約数 $0 < d|n$ のみをわたるものである. さて, 以下の補題で述べるように, 定数項以外の項は, 初等加法的整数論的な議論で, Dedekind の σ 函数 $\sigma_{k-1,\psi'}(n), \sigma'_{k-1,\psi'}(n)$ の k に関する p 進的な連続性を与える次の補題を示すことができる (この補題の証明に関しては, [Hi93] の §7.1 などを参照のこと):

補題 1.6. n を勝手な自然数とする．$A_n \in \Lambda_{\mathrm{ord}}$ で, 勝手な $k \geq 2$ に対して

$$(\chi_{\mathrm{ord}})^{k-2}(A_n) = \begin{cases} \sigma_{k-1,\psi\omega^{a-k}}(n) & p-1 \nmid k-a \text{ のとき} \\ \sigma'_{k-1,\psi}(n) & p-1 \mid k-a \text{ のとき} \end{cases}$$

をみたすものが一意に存在する．

一方で, 定数項の部分が k に関して p 進的に連続であること (下の命題 1.7) は定数項以外の部分に比べて非自明である．$\mathcal{O}$ を $\mathbb{Z}_p$ 上有限平坦な完備離散付値環をするとき, $\Lambda_{\mathrm{ord},\mathcal{O}} = \Lambda_{\mathrm{ord}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}$ とおく．

命題 1.7 (久保田-Leopoldt, 岩澤, Coleman)**.** $\mathcal{O}$ を $\mathbb{Z}_p$ に ψ の値を付け加えた環とするとき, $\zeta_p^{\mathrm{KL}}(\psi\omega^{a-k}) \in \Lambda_{\mathrm{ord},\mathcal{O}}$ が存在して, 全ての $k \geq 1$ で以下の補間性質をみたす:

$$\chi_{\mathrm{ord}}^{k-2}(\zeta_p^{\mathrm{KL}}(\psi\omega^{a-k})) = \begin{cases} \zeta(1-k, \psi\omega^{a-k}) & p-1 \nmid k-a \text{ のとき} \\ (1-\psi(p)p^{k-1})\zeta(1-k,\psi) & p-1 \mid k-a \text{ のとき} \end{cases}$$

注意 1.8. (1) 通常は $\zeta_p^{\mathrm{KL}}(\psi\omega^{a-k})$ は円分 $\mathbb{Z}_p$-拡大 $\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q}$ のガロア群 Γ_{cyc} による岩澤代数 $\Lambda_{\mathrm{cyc},\mathcal{O}} = \mathcal{O}[[\Gamma_{\mathrm{cyc}}]]$ のなかに構成される．$\Gamma_{\mathrm{ord}}, \Gamma_{\mathrm{cyc}}$ はともに $1+p\mathbb{Z}_p$ と標準的な同型をもつので, ここでは標準同型を介して $\Lambda_{\mathrm{ord},\mathcal{O}}$ の元とみなしている．

(2) 指標が自明な場合には p 進 L 函数は極を持ち得るが, 今回は状況の複雑さを避けるために $\psi\omega^{a-k}$ が自明な場合は仮定で省かれている．

$A_0 = \dfrac{\zeta_p^{\mathrm{KL}}(\psi\omega^{a-k})}{2}$ とおく．補題 1.6, 命題 1.7 によって次がわかる:

定理 1.9 (肥田理論の Λ-進 Eisenstein 級数版)**.** ψ を p と素な導手をもつディリクレ指標, a を $0 < a < p-1$ なる自然数で $\psi\omega^a$ が偶指標であるものとする．このとき, 形式的な q-展開 $\mathcal{E} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} A_n q^n \in \Lambda_{\mathrm{ord},\mathcal{O}}[[q]]$ に対して,

$$\chi_{\mathrm{ord}}^{k-2}(\mathcal{E}) = E_k(\psi\omega^{a-k})$$

が全ての $k \geq 2$ で成り立つ．

今回は, サマースクールのテーマがガロア表現の変形であるためガロア表現やヘッケ環の変形の観点から肥田理論を展開する．したがってモジュラー形式の q-展開の変形という観点からの肥田理論は展開しないことにする．もちろん, これらの異なる肥田理論の表現の仕方は多かれ少なかれ同値な情報を表しているが, 一方ではそれぞれの観点での肥田理論を正確に展開することも大事である．「モジュラー形式の q-展開の観点での肥田理論」は Wiles の論文 [Wi88] や太田氏の論文 [Oh95] を参照されたい．

1.5. **肥田理論の応用.** この導入部分の最後として肥田理論や肥田変形といったものはそれ自身で興味深いものであるが応用としても非常に可能性を秘めた道具であることも言及しておきたい．例えば p 進 L 函数の構成や p 進 L 函数の性質の研究にはときに肥田変形が大事な役割を演じる．

(1) 上でみたように代数群 $\mathrm{GL}(2)_{/\mathbb{Q}}$ に付随した Eisenstein 級数の肥田変形の「定数項」は代数群 $\mathrm{GL}(1)_{/\mathbb{Q}}$ に付随したモジュラー形式の p 進 L 函数 (久保田-Leopoldt 型の p 進 L 函数) であった. 実際は, 非定数項に関しては p 進補間の問題は難しくないので, 問題として

「$\mathrm{GL}(2)_{/\mathbb{Q}}$ に付随した Eisenstein 級数の重さに関する p 進補間 (肥田変形)」

$\Longleftrightarrow$「$GL_1(\mathbb{Q})$ のモジュラー形式の L 函数の特殊値の重さに関する p 進補間」

同様に総実体 F 上の $\mathrm{GL}(2)_{/F}$ に付随した Eisenstein 級数の肥田変形の「定数項」は, Deligne-Ribet によって構成された代数群 $\mathrm{GL}(1)_{/F}$ に付随したモジュラー形式の p 進 L 函数となる. このようなことを用いて, [Wi90] は総実体 F 上の代数群 $\mathrm{GL}(1)_{/F}$ に対する岩澤主予想を解決している. このような関係は, GL(2) の代わりにランクの高い代数群における Eisenstein 級数の肥田変形を考えることで, より一般の岩澤理論に応用があると思われている. 例えば, 最近の Skinner-Urban の研究では $\mathrm{U}(2,2)$ における Eisenstein 級数の肥田変形を用いて代数群 $\mathrm{GL}(2)_{/\mathbb{Q}}$ に付随したモジュラー形式の p 進 L 函数や岩澤理論への応用が追求されている.

(2) 代数群 $\mathrm{GL}(2)_{/\mathbb{Q}}$ に付随した Eisenstein 級数の p 進変形は, 「定数項」にも興味深い他の p 進 L 函数との結びつきがある. 複素上半平面の中である虚 2 次体 K の整数環からくる CM 点で楕円モジュラーな Eisenstein 級数の値をみると K のヘッケ指標の L 函数の特殊値が現れる. 例えば非正則な重さ j,k の Eisenstein 級数

$$E_{j,k}(z)=\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2\setminus(0,0)}\frac{1}{(mz+n)^j(m\overline{z}+n)^k}$$

を考える. ($\overline{z}$ は z の複素共役) 例えば, $j=k$ のときに,

$$E_{j,k}(z)|_{z=\sqrt{-1}}=\frac{1}{w_{\mathbb{Q}(\sqrt{-1})}}\sum_{\mathfrak{A}\subset\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]}\frac{1}{N(\mathfrak{A})^j}=\frac{1}{w_{\mathbb{Q}(\sqrt{-1})}}L(\mathbb{Q}(\sqrt{-1}),j)$$

となる. 但し, $w_{\mathbb{Q}(\sqrt{-1})}$ は $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ における 1 のべき根の個数, $L(\mathbb{Q}(\sqrt{-1}),s)$ は $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ のデデキントゼータ函数である. 同様にして, 重さ j, k がそれぞれ独立に動く時にも, $E_{j,k}(z)|_{z=\sqrt{-1}}$ は, $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ のタイプ (j,k) のヘッケ指標の L 函数の $s=0$ の特殊値と結びつくこともわかる. また, $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ 以外の虚 2 次体 K でも, K に入る複素上半平面の点 (CM 点) での値をとることで同様のことが考えられる. かくして, Eisenstein 級数が重さ (j,k) に関して p 進的な族をなすことから「CM 点での値」によって虚 2 次体 K の $GL_1(K)$ に付随したモジュラー形式の p 進 L 函数が得られる. このような研究は, 楕円モジュラーのみでなくヒルベルトモジュラーな Eisenstein 級数の場合に得られており, Katz の論文 [Ka78] などを参照されたい.

(3) Eisenstein 級数の p 進的な族だけでなく, カスプ形式の肥田変形も様々な p 進 L 函数を生み出すこともある. Rankin-Selberg や Petersson 内積を用いて $\mathrm{GL}(2)\times\mathrm{GL}(2)$ の p 進 L 函数の研究などに, 肥田氏をはじめとしていくらか結果がある

がここでは省略したい. (例えば文献 [Hi96] やその末尾の参考文献リストを参照のこと)

2. 諸概念の導入と肥田理論の主定理

2.1. 肥田のべき等元 e と p 通常的部分. 肥田理論を展開する上で大事な概念は, ordinary part を定義するための ordinary idempotent operator e とよばれる作用素である.

補題 2.1. *M を有限階数の自由 $\mathbb{Z}_p$ 加群, $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{Z}_p}(M)$ とする. このとき次が成り立つ.*

(1) *任意の元 $x \in M$ に対して $\lim_{n\to\infty} f^{n!}(x)$ は M の元に収束する. $\lim_{n\to\infty} f^{n!} : x \mapsto \lim_{n\to\infty} f^{n!}(x)$ は M から M への $\mathbb{Z}_p$-線形自己準同型となる.*

(2) *$\lim_{n\to\infty} f^{n!}$ は M 上のべき等元となる. 特に, x が f の固有ベクトルのときは*

$$\lim_{n\to\infty} f^{n!}(x) = \begin{cases} x & x\text{ の固有値が } p \text{ 進単数のとき}, \\ 0 & x \text{ の固有値が } p \text{ 進単数でないとき}, \end{cases}$$

となる.

M が自由とは限らない有限生成 $\mathbb{Z}_p$ 加群, $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{Z}_p}(M)$ としても上の補題と同等のべき等元 $e = \lim_{n\to\infty} f^{n!}$ が定義できるが, 定理の内容も証明もほぼ同様に記述されるので詳しくは省略する. が, 以下では, 必要に応じて M が自由とは限らない場合にも上の補題とべき等元 e を用いることにする.

(M が自由な場合の) 証明. $\mathcal{O}$ は $\mathbb{Z}_p$ 上のある有限次拡大の整数環で, $\det(x\mathrm{I}-A_f)=0$ の根を全て含むものとする (但し, I は M の $\mathbb{Z}_p$-ランクに等しいサイズをもつ単位行列とし, A_f は M の適当な $\mathbb{Z}_p$-基底に関する f の表現行列とする). $M_{\mathcal{O}} = M \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}$ 上に f から引き起こされる準同型を $f_{\mathcal{O}}$ と記す. $\lim_{n\to\infty} (f_{\mathcal{O}})^{n!}$ に対して補題と同じ性質を示せば $\lim_{n\to\infty} f^{n!}$ に対して望む性質が従う.

$f_{\mathcal{O}}$ で保たれる一般固有空間分解 $M_{\mathcal{O}} = \oplus M_{\mathcal{O}}(f;\alpha_j)$ をとる. $M_{\mathcal{O}}(f;\alpha_j)$ 上では, ある (位相的に) ベキ零な自己準同型 n_j によって $f_{\mathcal{O}} = \alpha_j\mathrm{I} + n_j$ と表せるようなものが存在する. この分解から, α_j が p 進単数ならば $\lim_{n\to\infty} (f_{\mathcal{O}}|_{M_{\mathcal{O}}(f;\alpha_j)})^{n!}$ は恒等写像, α_j が p 進単数でなければ $\lim_{n\to\infty} (f_{\mathcal{O}}|_{M_{\mathcal{O}}(f;\alpha_j)})^{n!}$ は零写像であることがわかる. $\square$

以下, $(p, N) = 1$ なる自然数 N を固定する. M をアーベル群とする. (特に, $M = \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p, \mathbb{Z}, \mathbb{C}$ などを念頭に置いている) 今, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ が自然に作用する加群 $\mathrm{Sym}^{k-2}(M^{\oplus 2})$ を $L_k(M)$ で記す. 複素上半平面 $\mathfrak{H}$ との積 $\mathfrak{H} \times L_k(M)$ に合同部分群 $\Gamma_1(Np^r)$ を対角的に作用させることによって得られるモジュラー曲線 $Y_1(Np^r)_{\mathbb{C}} = \Gamma_1(Np^r) \setminus \mathfrak{H}$ 上の局所系を $\mathcal{L}_k(M)$ で記すことにする. コンパクト台をもつエタールコホモロジーや通常のエタールコホモロジーを用いて, パラボリックコホモロジーを

$$H^1_{\mathrm{par}}(Y_1(Np^r)_{\mathbb{C}}, \mathcal{L}_k(M)) = \mathrm{Image}\left[H^1_{\mathrm{c}}(Y_1(Np^r)_{\mathbb{C}}, \mathcal{L}_k(M)) \longrightarrow H^1(Y_1(Np^r)_{\mathbb{C}}, \mathcal{L}_k(M))\right]$$

と定義する．本来は, 上のコホモロジー達は局所系に対するベッチコホモロジーであるが, M が有限アーベル群のときにベッチコホモロジーとエタールコホモロジーの比較定理によってこれらは自然にエタールコホモロジーと同型になることが知られている．したがって, M が有限なときに

$$H^1_{\mathrm{par}}(Y_1(Np^r)_{\mathbb{C}},\mathcal{L}_k(M)),\ H^1_{\mathrm{c}}(Y_1(Np^r)_{\mathbb{C}},\mathcal{L}_k(M)),\ H^1(Y_1(Np^r)_{\mathbb{C}},\mathcal{L}_k(M))$$

は, 場合によっては特に断らずに $Y_1(Np^r)_{\mathbb{C}}$ 上のエタールサイトにおけるエタールコホモロジーと思うことにする．

本記事の最初に固定した埋め込み $\overline{\mathbb{Q}}\hookrightarrow\mathbb{C}$ から, 同型:

$$\begin{aligned} H^1(Y_1(Np^r)_{\overline{\mathbb{Q}}},\mathcal{L}_k(\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z})) &\xrightarrow{\sim} H^1(Y_1(Np^r)_{\mathbb{C}},\mathcal{L}_k(\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}))\\ H^1_{\mathrm{c}}(Y_1(Np^r)_{\overline{\mathbb{Q}}},\mathcal{L}_k(\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z})) &\xrightarrow{\sim} H^1_{\mathrm{c}}(Y_1(Np^r)_{\mathbb{C}},\mathcal{L}_k(\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}))\end{aligned}$$

が引き起こされる．よって, パラボリックなコホモロジーを

$$\begin{aligned} &H^1_{\mathrm{par}}(Y_1(Np^r)_{\overline{\mathbb{Q}}},\mathcal{L}_k(\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}))\\ &\qquad= \mathrm{Image}\left[H^1_{\mathrm{c}}(Y_1(Np^r)_{\overline{\mathbb{Q}}},\mathcal{L}_k(\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}))\longrightarrow H^1(Y_1(Np^r)_{\overline{\mathbb{Q}}},\mathcal{L}_k(\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}))\right]\end{aligned}$$

と定義すると, 同型

$$H^1_{\mathrm{par}}(Y_1(Np^r)_{\overline{\mathbb{Q}}},\mathcal{L}_k(\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}))\xrightarrow{\sim} H^1_{\mathrm{par}}(Y_1(Np^r)_{\mathbb{C}},\mathcal{L}_k(\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}))$$

が引き起こされる．

$Y_1(Np^r)_{\overline{\mathbb{Q}}}$ 上のパラボリックなエタールコホモロジー $H^1_{\mathrm{par}}(Y_1(Np^r)_{\overline{\mathbb{Q}}},\mathcal{L}_k(\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}))$ には自然に $\mathbb{Q}$ の絶対ガロア群 $G_{\mathbb{Q}}$ が作用する．

$$H^1_{\mathrm{par}}(Y_1(Np^r)_{\overline{\mathbb{Q}}},\mathcal{L}_k(\mathbb{Z}_p)) := \varprojlim_s H^1_{\mathrm{par}}(Y_1(Np^r)_{\overline{\mathbb{Q}}},\mathcal{L}_k(\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}))$$

とすると

$$H^1_{\mathrm{par}}(Y_1(Np^r)_{\overline{\mathbb{Q}}},\mathcal{L}_k(\mathbb{Z}_p))\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Q}_p \cong \bigoplus_{f\in S_k(\Gamma_1(Np^r))} V_f$$

なる $G_{\mathbb{Q}}$ の表現の同型がある．ここで, f は $S_k(\Gamma_1(Np^r))$ の中の同時ヘッケ固有カスプ形式をわたり, V_f は Deligne らによって構成された f に付随するガロア表現とする．

よって, 前節の定理 1.1 または以下で述べる主定理のような肥田変形を構成するには, $H^1_{\mathrm{par}}(Y_1(Np^r)_{\overline{\mathbb{Q}}},\mathcal{L}_k(\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}))$ もしくは $H^1_{\mathrm{par}}(Y_1(Np^r)_{\mathbb{C}},\mathcal{L}_k(\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}))$ を重さ k やレベルのべき p^r の変動に関して「コントロールする」ことが鍵となる．今, U_p 作用素が $\mathbb{Z}_p$-準同型として $H^1_{\mathrm{par}}(Y_1(Np^r)_{\overline{\mathbb{Q}}},\mathcal{L}_k(\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}))$ 上に作用している．肥田氏の観察は, 上の補題を $M=H^1_{\mathrm{par}}(Y_1(Np^r)_{\overline{\mathbb{Q}}},\mathcal{L}_k(\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}))$, $f=U_p$ の場合に得られるべき等元 $e=\lim_{n\to\infty}f^{n!}$ で切り取られる空間に制限すればそのようなコントロールがうまくいくという発見にはじまる．以下で, それらについての正確な記述をのべたい．

2.2. **群コホモロジーによる p 通常的変形の構成.**

定義 2.2. (1) パラボリックコホモロジー $H^1_{\mathrm{par}}(Y_1(Np^r)_{\overline{\mathbb{Q}}},\mathcal{L}_k(\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}))$ の通常的部分 (ordinary part) $H^1_{\mathrm{par}}(Y_1(Np^r)_{\overline{\mathbb{Q}}},\mathcal{L}_k(\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}))^{\mathrm{ord}}$ を

$$H^1_{\mathrm{par}}(Y_1(Np^r)_{\overline{\mathbb{Q}}},\mathcal{L}_k(\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}))^{\mathrm{ord}}=e(H^1_{\mathrm{par}}(Y_1(Np^r)_{\overline{\mathbb{Q}}},\mathcal{L}_k(\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z})))$$

で定義する.

(2)

$$(\mathbb{T}_N^{\mathrm{ord},(k)})':=\left(\varinjlim_{r,s}H^1_{\mathrm{par}}(Y_1(Np^r)_{\overline{\mathbb{Q}}},\mathcal{L}_k(\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}))^{\mathrm{ord}}\right)^{\mathrm{PD}}$$

とおく. (PD はポントリャーギン双対をあらわす) これを用いて,

$$\mathbb{T}_N^{\mathrm{ord},(k)}:=\mathrm{Hom}_{\Lambda_{\mathrm{ord}}}\left((\mathbb{T}_N^{\mathrm{ord},(k)})',\Lambda_{\mathrm{ord}}\right)$$

と定義する.

命題 A (レベルに関するコントロール)**.** (1) $\mathbb{T}_N^{\mathrm{ord},(k)}$ は有限生成自由 Λ_{ord}-加群である.

(2) 任意の $r\geq 1$ に対して自然な写像

$$(\mathbb{T}_N^{\mathrm{ord},(k)})_{(\Gamma_{\mathrm{ord}})^{p^r}}\longrightarrow\left(H^1_{\mathrm{par}}(Y_1(Np^r)_{\overline{\mathbb{Q}}},\mathcal{L}_k(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p))^{\mathrm{ord}}\right)^{\mathrm{PD}}$$

は同型となる. 但し, $(\mathbb{T}_N^{\mathrm{ord},(k)})_{(\Gamma_{\mathrm{ord}})^{p^r}}$ は $\mathbb{T}_N^{\mathrm{ord},(k)}$ の最大 $(\Gamma_{\mathrm{ord}})^{p^r}$-不変商とする.

注意 2.3. (1) $H^1_{\mathrm{par}}(Y_1(Np^r)_{\overline{\mathbb{Q}}},\mathcal{L}_k(\mathbb{Z}_p))$ と $\left(H^1_{\mathrm{par}}(Y_1(Np^r)_{\overline{\mathbb{Q}}},\mathcal{L}_k(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p))^{\mathrm{ord}}\right)^{\mathrm{PD}}$ の $\mathbb{Z}_p$-線形双対とは自然に同型であることに注意したい.

(2) p 通常的部分に限らないモジュラー形式全体 $S_k(\Gamma_1(Np^r);\mathbb{Q})$ はレベルの p べきの変動に関する次元の増加が急であり, 上の $\mathbb{T}_N^{\mathrm{ord},(k)}$ にあたる $H^1_{\mathrm{par}}(Y_1(Np^r)_{\overline{\mathbb{Q}}},\mathcal{L}_k(\mathbb{Z}_p))$ の親玉となる有限生成 Λ_{ord}-加群の存在は望めない.
実際, $(\Lambda_{\mathrm{ord}})_{(\Gamma_{\mathrm{ord}})^{p^r}}\cong\mathbb{Z}_p[\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}]$ は $\mathbb{Z}_p$-ランクが p^r であるから, 上の $\mathbb{T}_N^{\mathrm{ord},(k)}$ が存在することの帰結として

$$\dim_{\mathbb{Q}}H^1_{\mathrm{par}}(Y_1(Np^r)_{\overline{\mathbb{Q}}},\mathcal{L}_k(\mathbb{Z}_p))^{\mathrm{ord}}=2\dim_{\mathbb{Q}}S_k(\Gamma_1(Np^r);\mathbb{Q})^{\mathrm{ord}}$$

は r が増加するときに p^r に関して 1 次のオーダーで増加することがしたがう.
一方で, $S_k(\Gamma_1(Np^r);\mathbb{Q})$ 全体の次元は, 例えば $k=2,N=1$ の場合でみると, $\dim_{\mathbb{Q}}S_2(\Gamma_1(p^r);\mathbb{Q})$ はモジュラー曲線 $X_1(p^r)$ の種数 $g(X_1(p^r))$ に等しい. Riemann-Hurwitz の公式によると

$$g(X_1(p^r))=1+\frac{1}{24}(p^2-1)p^{2(r-1)}-\frac{1}{4}\sum_{i=0}^{r}\phi(p^i)\phi(p^{r-i})\ \text{(但し, ϕ はオイラー函数とする)}$$

である. よって上のような有限生成な親玉は存在しない.

命題 A の証明のスケッチを述べる前に群コホモロジーへの作用素 U_p の作用について復習しておく. (他の素数 l でのヘッケ作用素についても全く同様であるが, 命題 A と命題 B の証明に関係するのは U_p のみであるから U_p のみに関して記しておく)
C を群 $SL_2(\mathbb{Z})$ の作用をもつアーベル群として, C は $M_2(\mathbb{Z})\cap GL_2(\mathbb{Q})$ の作用ももつとする. U_p は群コホモロジー

$$H^i(\Gamma_1(Np^r), C), \quad r \geq 1$$

への両側剰余類 $\Gamma_1(Np^r)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & p\end{pmatrix}\Gamma_1(Np^r)$ の作用である. $\Gamma_1(Np^r)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & p\end{pmatrix}\Gamma_1(Np^r) = \coprod_{0\leq j\leq p-1}\Gamma_1(Np^r)\begin{pmatrix}1 & j\\ 0 & p\end{pmatrix}$ であることも思い出したい. これによって, $g \in \Gamma_1(Np^r)$ に対して, $g_j\Gamma_1(Np^r)$ $(0 \leq j \leq p-1)$ を以下のように定める.

$$\begin{pmatrix}1 & j\\ 0 & p\end{pmatrix} g = g_j \begin{pmatrix}1 & J'\\ 0 & p\end{pmatrix} \tag{1}$$

(ここで, $\begin{pmatrix}1 & j\\ 0 & p\end{pmatrix} g$ に対して必ず一意的な j' が存在して $\begin{pmatrix}1 & j\\ 0 & p\end{pmatrix} g \in \Gamma_1(Np^r)\begin{pmatrix}1 & j'\\ 0 & p\end{pmatrix}$ となることに注意). 今, $H^i(\Gamma_1(Np^r), C)$ の元 $[x]$ を代表する i-コサイクル $x : \Gamma_1(Np^r)\times\cdots\times\Gamma_1(Np^r) \longrightarrow C$ に対して

$$U_p[x(g^{(1)}, \cdots, g^{(i)})] = \left[\sum_{0\leq j\leq p-1}\begin{pmatrix}1 & j\\ 0 & p\end{pmatrix}\cdot x(g_j^{(1)}, \cdots, g_j^{(i)})\right] \tag{2}$$

で U_p の作用を定める.

命題 A の証明のスケッチ
証明の鍵となるふたつの大事な補題を用意する.
各合同部分群 $\Gamma_1(Np^r)$ を考えたとき, $L_k(\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z})$ の $\Gamma_1(Np^r)$-加群としての群コホモロジーを $H^1(\Gamma_1(Np^r), L_k(\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}))$ で記す. また, 各カスプの固定部分群で局所的に自明であるという条件を課すことで, 群コホモロジーのレベルでもパラボリックコホモロジー

$$H^1_{\mathrm{par}}(\Gamma_1(Np^r), L_k(\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z})) \subset H^1(\Gamma_1(Np^r), L_k(\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}))$$

が定義される. (正確な定義については, 例えば [Hi93] の Appendix を参照のこと)

補題 2.4. ヘッケ環の作用を保つ自然な同型

$$H^1(\Gamma_1(Np^r), L_k(\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z})) \cong H^1(Y_1(Np^r)_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathcal{L}_k(\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}))$$
$$H^1_{\mathrm{par}}(\Gamma_1(Np^r), L_k(\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z})) \cong H^1_{\mathrm{par}}(Y_1(Np^r)_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathcal{L}_k(\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}))$$

が存在する.

この補題に関しても例えば [Hi93] の Appendix などを参照されたい. この補題によって, モジュラーなガロア表現をレベルや重さを変えるときに「張り合わせる」(あ

るいは「コントロール」する）問題を群コホモロジーの計算の問題に持ち込むことができたのである．今, Eichler-志村同型とよばれる以下の同型たち:

$$H^1_{\mathrm{par}}(Y_1(Np^r)_{\mathbb{C}}, \mathcal{L}_k(\mathbb{C})) \cong S_k(\Gamma_1(Np^r); \mathbb{C}) \oplus \overline{S_k(\Gamma_1(Np^r); \mathbb{C})}$$
$$H^1(Y_1(Np^r)_{\mathbb{C}}, \mathcal{L}_k(\mathbb{C})) \cong S_k(\Gamma_1(Np^r); \mathbb{C}) \oplus \overline{S_k(\Gamma_1(Np^r); \mathbb{C})} \oplus E_k(\Gamma_1(Np^r); \mathbb{C})$$

が知られている．但し, $\overline{S_k(\Gamma_1(Np^r); \mathbb{C})}$ は反正則なカスプ形式の空間, $E_k(\Gamma_1(Np^r); \mathbb{C})$ は重さが $k \geq 2$, レベル $\Gamma_1(Np^r)$ の Eisenstein 級数たちで $\mathbb{C}$ 上張られるベクトル空間とする．よって,

$$H^1_{\mathrm{par}}(Y_1(Np^r)_{\mathbb{C}}, \mathcal{L}_k(\mathbb{C})) \cong H^1_{\mathrm{par}}(\Gamma_1(Np^r), L_k(\mathbb{C}))$$

と

$$H^1(Y_1(Np^r)_{\mathbb{C}}, \mathcal{L}_k(\mathbb{C})) \cong H^1(\Gamma_1(Np^r), L_k(\mathbb{C}))$$

との差は Eisenstein 級数たちで代表されることより, $\mathbb{C}$ 係数では H^1 と H^1_{par} の差がよくわかっている．$\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}$-係数でも p 通常的部分に限れば以下のように H^1 と H^1_{par} の差が Eisenstein 級数たちで代表される．

補題 2.5. 勝手な重さ $k \geq 2$ と勝手なレベル Np^r で次が成立する．
(1) $H^1_{\mathrm{par}}(\Gamma_1(Np^r), L_k(\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}))^{\mathrm{ord}}$, $H^1(\Gamma_1(Np^r), L_k(\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}))^{\mathrm{ord}}$ はともに有限生成な自由 $\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}$-加群である．
(2) p 通常的部分に制限したとき

$$H^1_{\mathrm{par}}(\Gamma_1(Np^r), L_k(\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}))^{\mathrm{ord}} \hookrightarrow H^1(\Gamma_1(Np^r), L_k(\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}))^{\mathrm{ord}}$$

の余核は自由 $\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}$-加群であり, その $\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}$-ランクは $G_k(\Gamma_1(Np^r); \mathbb{C})$ の $\mathbb{C}$-ランクと等しい．

この補題の証明に関しては, [Hi93] の Lemma 4.6 及び Theorem 4.9 を参照のこと．さて, この補題によって, 局所条件のついた群コホモロジー H^1_{par} をコントロールする問題の代わりに何も条件のない普通の群コホモロジー H^1 をコントロールする問題を考えれば済む．

今, 各 $r \geq 1$ において群コホモロジーの自然な制限写像

$$H^1(\Gamma_1(Np^r), L_k(\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z})) \xrightarrow{\mathrm{res}} H^1(\Gamma_1(Np^{r+1}), L_k(\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}))^{\Gamma_1(Np^r)} \tag{3}$$

がある．(ここで, $(\quad)^{\Gamma_1(Np^r)}$ は $\Gamma_1(Np^r)$ 不変部分をあらわす) Inflation-restriction 写像

$$\begin{aligned} &H^1(\Gamma_1(Np^r)/\Gamma_1(Np^{r+1}), L_k(\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z})^{\Gamma_1(Np^{r+1})}) \\ &\qquad \longrightarrow H^1(\Gamma_1(Np^r), L_k(\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z})) \xrightarrow{\mathrm{res}} H^1(\Gamma_1(Np^{r+1}), L_k(\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}))^{\Gamma_1(Np^r)} \\ &\qquad\qquad \longrightarrow H^2(\Gamma_1(Np^r)/\Gamma_1(Np^{r+1}), L_k(\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z})^{\Gamma_1(Np^{r+1})}) \end{aligned} \tag{4}$$

を考えると, この制限写像の Kernel, Cokernel への U_p の作用はべき零であることが計算によりわかるので, e を施すと補題 2.1 の議論によって p 通常的部分の間の同型写像を引き起こす．注意 1.5 及びそれに引き続く議論によって, 群コホモロジー全体

をコントロールすることとパラボリックな部分群のみをコントロールすることは同値な問題である．よって,

$$H^1_{\mathrm{par}}(\Gamma_1(Np^r), L_k(\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}))^{\mathrm{ord}} \xrightarrow{\sim} (H^1_{\mathrm{par}}(\Gamma_1(Np^{r+1}), L_k(\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}))^{\mathrm{ord}})^{\Gamma_1(Np^r)}$$

を得る．かくして命題 A の (2) が従う．(制限写像の Kernel, Cokernel への U_p の作用がべき零であることの計算については命題 B の証明でも同様な流れの議論があるのでこちらでは省略したい)

さて, コンパクトな Λ_{ord}-加群 $X = \left(\varinjlim_{r,s} H^1_{\mathrm{par}}(Y_1(Np^r)_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathcal{L}_k(\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}))^{\mathrm{ord}}\right)^{\mathrm{PD}}$ に対して, 勝手な r で, 商 $X_{\Gamma_1(Np^r)} \cong (H^1(\Gamma_1(Np^r), L_k(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)))^{\mathrm{PD}}$ は有限生成 $\mathbb{Z}_p$-加群となる．中山の補題によって, X は有限生成 Λ_{ord}-加群であることが結論付けられる．$\mathbb{T}^{\mathrm{ord},(k)}_N = \mathrm{Hom}_{\Lambda_{\mathrm{ord}}}(X, \Lambda_{\mathrm{ord}})$ より, $\mathbb{T}^{\mathrm{ord},(k)}$ は reflexible な有限生成 Λ_{ord}-加群となる．Λ_{ord} は Krull 次元が 2 の完備正則局所環であるから, reflexible な有限生成加群は自由加群である．かくして命題 A の (1) が従う．以上で命題 A の証明のスケッチを終える．

命題 B (補助的な重さ k による非依存性)**.** 各 $k \geq 2$ に対して $\mathbb{T}^{\mathrm{ord},(k)}_N$ への Γ_{ord} の作用を

$$g * m = \chi_{\mathrm{ord}}^{2-k}(g) g \cdot m \quad (\text{左辺の } * \text{ が新しい作用, 右辺の } \cdot \text{ が古い作用})$$

で入れたものは $\mathbb{T}^{\mathrm{ord},(2)}_N$ と同型な Λ_{ord}-加群である．

$\mathbb{T}^{\mathrm{ord},(k)}_N$ たちは, (k ごとに作用がひねられている以外は) 補助的に固定する重さ k に依存しないので, 特に $k = 2$ の場合を基準にして

$$\mathbb{T}^{\mathrm{ord}}_N := \mathbb{T}^{\mathrm{ord},(2)}_N$$

とおく．

命題 B の証明のスケッチ

命題 A の証明のときと同様に補題 2.4 と補題 2.5 によってパラボリックな群コホモロジーに対する問題を局所条件のない普通の群コホモロジーに置き換えて証明すれば十分である．

まず, $\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}$-加群 M に対して $L_k(M) = \mathrm{Sym}^{k-2}(M^{\oplus 2})$ $(k > 2)$ の元を

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^{k-2} = {}^{\mathrm{t}}(x^{k-2}, x^{k-1}y, \cdots, xy^{k-1}, y^{k-2})$$

として, $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}) \cap GL_2(\mathbb{Q})$ の $L_k(M)$ への作用はその余因子行列 $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ の縦ベクトルへの自然な作用とする．また, $k = 2, r$ のとき, $x \in L_2(M) \cong$

M だけでなく各整数 t に対して, $M(t)$ を $x \in M(t)$ に対して

$$g \in \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}) \middle| ad-bc>0,\ c \equiv 0 \bmod p^r,\ a \equiv 1 \bmod p^s \right\}$$

の作用を $g \cdot x := a^t x$ で定める加群とする. 今, 勝手な $t \in \mathbb{Z}$ に対して, $H^1(\Gamma_1(Np^r), M(t))$ はアーベル群として $H^1(\Gamma_1(Np^r), L_2(M))$ と同型で, $\Gamma_0(Np^r)/\Gamma_1(Np^r) \cong \Gamma_{\mathrm{ord}}/(\Gamma_{\mathrm{ord}})^{p^{r-1}}$ の作用が χ_{ord}^t による twist 分のずれをもつことに注意したい.
$r \geq s$ のとき,

$$(5) \qquad L_k(\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}) \overset{\mathrm{p}_k}{\twoheadrightarrow} (\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z})(k-2), \quad {}^{\mathrm{t}}(a_0, a_1, \cdots, a_{k-1}, a_{k-2}) \mapsto a_{k-2}$$

なる写像がある.

$r \geq s$ とするとき, (5) の写像は $\Gamma_1(Np^r)$-加群の作用と両立する. したがって, (5) は群コホモロジーの写像

$$(6) \quad \begin{aligned} &H^1(\Gamma_1(Np^r), \mathrm{Ker}(\mathrm{p}_k)) \longrightarrow H^1(\Gamma_1(Np^r), L_k(\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z})) \\ &\longrightarrow H^1(\Gamma_1(Np^r), \mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}(k-2)) \longrightarrow H^2(\Gamma_1(Np^r), \mathrm{Ker}(\mathrm{p}_k)) \end{aligned}$$

を引き起こす. 今, 命題 A の前の (2) における U_p の作用を思い出す. $\mathrm{Ker}(\mathrm{p}_k)$ を係数にもつ 1-コサイクル $[x]$ への $\begin{pmatrix} 1 & j \\ 0 & p \end{pmatrix}$ の作用を考えることで, 得られた 1-コサイクル $U_p[x]$ の値は $p\mathrm{Ker}(\mathrm{p}_k)$ に入ることがわかる. よって, U_p は $H^i(\Gamma_1(Np^r), \mathrm{Ker}(\mathrm{p}_k))$ 上に位相的にべき零に作用することがわかる. 完全列 (6) 全体に e を作用させることで同型

$$H^1(\Gamma_1(Np^r), L_k(\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}))^{\mathrm{ord}} \longrightarrow H^1(\Gamma_1(Np^r), \mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}(k-2))^{\mathrm{ord}}$$

を得る. この同型の r, s に関する順極限とポントリャーギン双対をとることで欲しい同型が得られる. 以上で, 命題 B の証明のスケッチを終える.

2.3. **ガロア作用やヘッケ作用の局所的な様子.** p 通常的なガロア表現の p での分解群 $G_{\mathbb{Q}_p}$ に制限したときの局所的な性質を調べたい. 上でみたように勝手な重さ $k \geq 2$ のカスプ形式のガロア表現は重さ 2 のカスプ形式のガロア表現の族で p 進的に近似することができる. したがって, $H^1_{\mathrm{par}}(Y_1(Np^r)_{\overline{\mathbb{Q}}_p}, \mathbb{Z}_p)^{\mathrm{ord}}$ を調べたい. 今, $X_1(Np^r)$ を $Y_1(Np^r)$ にカスプを付け加えて得られるコンパクトなモジュラー曲線とすると

$$H^1_{\mathrm{par}}(Y_1(Np^r)_{\overline{\mathbb{Q}}_p}, \mathbb{Z}_p)^{\mathrm{ord}} \cong H^1(X_1(Np^r)_{\overline{\mathbb{Q}}_p}, \mathbb{Z}_p)^{\mathrm{ord}}$$

である.

命題 C (p での局所的性質)**.** $M_r^{(2)} = H^1(X_1(Np^r)_{\overline{\mathbb{Q}}_p}, \mathbb{Z}_p)^{\mathrm{ord}}$ とおくとき, 次が成り立つ.

(1) 各 $r \geq 1$ で $G_{\mathbb{Q}_p}$ の作用で保たれる完全系列

$$0 \longrightarrow (T_r^{(2)})^+ \longrightarrow M_r^{(2)} \longrightarrow (T_r^{(2)})^- \longrightarrow 0$$

があって, $(T_r^{(2)})^+$ と $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}((T_r^{(2)})^-, \mathbb{Z}_p)$ はともに $S_2(\Gamma_1(Np^r);\mathbb{Z}_p)^{\mathrm{ord}}$ のヘッケ環 $\mathfrak{h}_r$ 上の加群として階数 1 の自由加群となる.

(2) $(T_r^{(2)})^+$ への惰性群 I_p の作用は自明であり, $(M_r)^{I_p} = (T_r^{(2)})^+$ となる.

(3) $(T_r^{(2)})^+$ への幾何的フロベニウス $\mathrm{Frob}_p \in G_{\mathbb{Q}_p}/I_p$ の作用は U_p と一致する.

この命題に関しては, 証明には何らかの形での完備離散付値環上の幾何が必要である. このあたりを準備することはこの原稿全体のガロア表現的な立場と少しずれるので証明に深くは立ち入らない. が, 少しでもこの周辺の事情と簡単な説明のスケッチを試みたい.

命題Cの証明のスケッチ

特に, 記述 (1), (2) については [MW86] に $N = 1$ の場合に限って記されており, モジュラー曲線の mod p 還元の様子から証明が与えられている. 一方で, [Oh95] の後半には N が一般の場合に証明が書かれており, モジュラー曲線の mod p 還元など用いる結果の説明をこめて, より丁寧で見通しもよい証明が与えられている.

$J_1(Np^r)$ を $X_1(Np^r)$ のヤコビ多様体とする. $J_1(Np^r)$ の Tate 加群を用いて, 以下のような $G_{\mathbb{Q}}$-加群の同型がある:

$$H^1(X_1(Np^r)_{\overline{\mathbb{Q}}_p}, \mathbb{Z}_p) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(T_p(J_1(Np^r)), \mathbb{Z}_p).$$

また, p 上で局所的にみると, $J_1(Np^r)$ のうち U_p の作用で関して通常的な部分 $J_1(Np^r)^{\mathrm{ord}}$ は $\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^r})$ 上で good reduction をもつ. ([MW84] の section 3 などを参照のこと) $J_1(Np^r)^{\mathrm{ord}}$ のモデルとなる $\mathbb{Z}_p[\zeta_{p^r}]$ 上でのアーベル多様体を $\mathcal{J}_r$ で記す. $\mathcal{J}_r$ に付随する p-divisible group の connected part および étale part に対応するガロア表現 $T_p(\mathcal{J}_r)^{\mathrm{conn}}$ および $T_p(\mathcal{J}_r)^{\text{ét}}$ をとると $G_{\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^r})}$ 加群の完全系列

$$0 \longrightarrow T_p(\mathcal{J}_r)^{\mathrm{conn}} \longrightarrow T_p(J_1(Np^r)) \longrightarrow T_p(\mathcal{J}_r)^{\text{ét}} \longrightarrow 0$$

がある. さらに, この完全系列は $G_{\mathbb{Q}_p}$ の作用で保たれることもわかる. 上の完全系列の $\mathbb{Z}_p$-線形双対をとると

$$(7) \quad 0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(T_p(\mathcal{J}_r)^{\text{ét}}, \mathbb{Z}_p) \longrightarrow H^1(X_1(Np^r)_{\overline{\mathbb{Q}}_p}, \mathbb{Z}_p)^{\mathrm{ord}} \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(T_p(\mathcal{J}_r)^{\mathrm{conn}}, \mathbb{Z}_p) \longrightarrow 0$$

を得る. $(T_r^{(2)})^+ = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(T_p(\mathcal{J}_r)^{\text{ét}}, \mathbb{Z}_p)$, $(T_r^{(2)})^- = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(T_p(\mathcal{J}_r)^{\mathrm{conn}}, \mathbb{Z}_p)$ とおけばこれが求める性質をみたすものとなる. ヘッケ加群としての構造や Frob_p と U_p の関係などのより精密な記述については省略する. 以上で命題Cの証明のスケッチを終える.

2.4. **肥田理論の主定理のステートメント.** 肥田理論の主定理を述べるために言葉を導入しておく.

定義 2.6. (1) 整数 n に対して, 環準同型 $\rho : \Lambda_{\mathrm{ord}} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$ が重さ n の**数論的特殊化**であるとは, ある指数有限な部分群 $U \subset \Gamma_{\mathrm{ord}}$ が存在して $\rho|_U = \chi_{\mathrm{ord}}^n$ となることを

いう. $\Lambda_{\rm ord}$ 上有限な環 $\mathbb{H}$ に対して環準同型 $\rho:\mathbb{H}\longrightarrow\overline{\mathbb{Q}}_p$ が重さ n の**数論的特殊化**であるとは, $\rho|_{\Lambda_{\rm ord}}$ が上の意味で重さ n の数論的特殊化であることをいう.
(2) $\mathbb{H}$ を $\Lambda_{\rm ord}$ 上有限な環とするとき, $\mathrm{Spec}(\Lambda_{\rm ord})$ 及び $\mathrm{Spec}(\mathbb{H})$ の点で重さ n の数論的特殊化の Kernel として書ける素イデアルのこと (あるいは素イデアルに対応するスキーム論的な点のこと) を重さ n の**数論的点**とよぶことにする.

$\mathbb{T}_N^{\rm ord}$ に対して自然に $\Lambda_{\rm ord}$-加群としての直和因子 $(\mathbb{T}_N^{\rm ord})^{N\text{-new}}\subset\mathbb{T}_N^{\rm ord}$ で p の外のレベルでは newform と対応するようなものが存在する.

定義 2.7. (1) $\mathbb{H}_N^{\rm ord}\subset\mathrm{End}_{\Lambda_{\rm ord}}((\mathbb{T}_N^{\rm ord})^{N\text{-new}})$ を $l\nmid N$ なる素数におけるヘッケ作用素 T_l たちで生成される部分環とする.
(2) $\mathbb{K}_N^{\rm ord}:=\mathbb{H}_N^{\rm ord}\otimes_{\Lambda_{\rm ord}}\mathrm{Frac}(\Lambda_{\rm ord})$ と定める. ($\mathbb{K}_N^{\rm ord}$ は半単純環であり, 分解 $\mathbb{K}_N^{\rm ord}=\prod\mathbb{K}_i$ の各成分 $\mathbb{K}_i$ は $\mathrm{Frac}(\Lambda_{\rm ord})$ の有限次拡大体である)
(3) 合成写像

$$\mathbb{H}_N^{\rm ord}\hookrightarrow\mathbb{K}_N^{\rm ord}\twoheadrightarrow\mathbb{K}_i$$

の像を $\mathbb{H}_i$ とおく. ($\mathbb{H}_i$ は $\Lambda_{\rm ord}$ 上有限平坦な局所整域でその分数体が $\mathbb{K}_i$ となる)

上で述べたような $\mathbb{H}_i$ たちを肥田の通常的ヘッケ環の**枝 (branch)** と呼ぶ. 各枝に対して上述の定理により数論的特殊化が定まる. 各枝は局所整域なので扱いやすく, また全ての枝の情報を集めればヘッケ環 $\mathbb{H}_N^{\rm ord}$ 全体の情報を復元するので枝ごとにものごとを考えれば十分である.

今までのことを用いて肥田理論のガロア表現的な側面からの主定理が得られる:

主定理 (肥田理論のガロア表現的な視点からの主定理)**.** 半単純環 $\mathbb{K}_N^{\rm ord}$ の各成分 $\mathbb{K}_i$ を選ぶごとに, $\mathbb{V}_i:=(\mathbb{T}_N^{\rm ord})^{N\text{-new}}\otimes_{\mathbb{H}_N^{\rm ord}}\mathbb{K}_i$ は次の性質を満たす:
(1) $\mathbb{V}_i$ は $\mathbb{K}_i$ 上 2 次元であり, $\mathbb{V}_i$ への $G_{\mathbb{Q}}$ の作用は $\{v|Np\infty\}$ の外不分岐な既約表現を与える.
(2) $\mathbb{T}_i:=(\mathbb{T}_N^{\rm ord})^{N\text{-new}}\otimes_{\mathbb{H}_N^{\rm ord}}\mathbb{H}_i$ は $G_{\mathbb{Q}}$ が連続に作用する有限生成 $\mathbb{H}_i$-加群であり, $\mathbb{T}_i\otimes_{\mathbb{H}_i}\mathbb{K}_i\cong\mathbb{V}_i$ となる. さらに, 重さ $k-2$ の数論的特殊化 $\rho:\mathbb{H}_i\longrightarrow\overline{\mathbb{Q}}_p$ ごとに重さ k の固有カスプ形式 $f_\rho\in S_k(\Gamma_1(Np^*))$ で $l\nmid N$ なる素数ごとに $a_l(f_\rho)=\rho(T_l)$ なるものが一意的に存在して, $G_{\mathbb{Q}}$-加群としての同型 $\mathbb{T}_i\otimes_{\mathbb{H}_i}\rho(\mathbb{H}_i)\cong V_{f_\rho}$ がある.
(3) $G_{\mathbb{Q}_p}$ に作用を制限するとガロア表現は

$$0\longrightarrow(\mathbb{T}_i)^+\longrightarrow\mathbb{T}_i\longrightarrow(\mathbb{T}_i)^-\longrightarrow 0$$

なるフィルトレーションをもつ. 但し, $(\mathbb{T}_i)^+,\mathrm{Hom}_{\Lambda_{\rm ord}}((\mathbb{T}_i)^-,\Lambda_{\rm ord})$ はともに $\mathbb{H}_i$ 上の階数 1 の自由加群である. また, $(\mathbb{T}_i)^+$ は不分岐な $G_{\mathbb{Q}_p}$-加群であり, その作用を与える不分岐指標 $\widetilde{\alpha}_i:G_{\mathbb{Q}_p}\longrightarrow\mathbb{H}_i^\times$ に対して, $A_p=\widetilde{\alpha}_i(\mathrm{Frob}_p)\in\mathbb{H}_i$ は重さが 0 以上の任意の数論的特殊化 ρ で $\rho(A_p)=a_p(f_\rho)$ を満たす.

逆に, 勝手な重さ $k\geq 2$ の p 通常的な固有カスプ形式 $f\in S_k(\Gamma_1(Np^*))$ で N で newform であるものをとると, $\mathbb{H}_N^{\rm ord}$ のある枝 $\mathbb{H}_i$ と $\mathbb{H}_i$ の重さ $k-2$ の数論的特殊化 ρ_f が一意的に存在して, $G_{\mathbb{Q}}$-加群としての同型 $\mathbb{T}_i\otimes_{\mathbb{H}_i}\rho_f(\mathbb{H}_i)\cong V_f$ がある.

主定理の証明は, 命題 A, B, C で得られた結果たちと枝や数論的特殊化の定義を, 全て合わせて整理することで得られる. ただ, $\mathbb{T}_N^{\rm ord}=\varprojlim H^1(X_1(Np^r)_{\overline{\mathbb{Q}}_p},\mathbb{Z}_p)^{\rm ord}$ であ

ることより, 命題 C の $(T_r^{(2)})^+, (T_r^{(2)})^-$ を用いて,

$$(\mathbb{T}_i)^+ := \left(\varprojlim_r (T_r^{(2)})^+\right)^{N\text{-new}} \otimes_{\mathbb{H}_N^{\mathrm{ord}}} \mathbb{H}_i$$
$$(\mathbb{T}_i)^- := \left(\varprojlim_r (T_r^{(2)})^-\right)^{N\text{-new}} \otimes_{\mathbb{H}_N^{\mathrm{ord}}} \mathbb{H}_i$$

と定めればよいことに注意する.

注意 2.8. 上の主定理で漏らしたことや関連したことをコメントしたい.

(1) 各枝のヘッケ環 $\mathbb{H}_i$ は Λ_{ord} 上の構造として重さ $k-2 \geq 0$ の数論的点では étale である.

(2) 重さ $k=1$ の数論的特殊化で $\mathbb{H}_i$ や $\mathbb{T}_i$ を特殊化すると $k \geq 2$ の場合と異なり重さ 1 のカスプ形式に対応するガロア表現となる場合とそうでない場合とがある. 一方で, 重さ 1 でレベル Np^* の p 通常的な固有カスプ形式 f をとると, 必ず $\mathbb{H}_N^{\mathrm{ord}}$ のある枝 $\mathbb{H}_i$ と重さ $k-2=-1$ の数論的特殊化 $\rho_f : \mathbb{H}_i \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$ が存在して同型 $\mathbb{T}_i \otimes_{\mathbb{H}_i} \rho_f(\mathbb{H}_i) \cong V_f$ がある. 但し, $k \geq 2$ の場合と違い $\mathbb{H}_i$ と ρ_f の組は一意的には定まらないこともある. また重さ $k-1=-1$ では数論的点で分岐することもありうる.

2.5. **群コホモロジー以外の方法による肥田変形の別構成.** この節の最後に, p 通常的モジュラー形式の p 進変形族の構成を与える肥田変形の他の構成方法もあることを注意しておきたい. 上述のように, 命題 A,B のような計算で示す**構成方法１ (群コホモロジー的方法あるいはベッチ的方法)** 以外の別のアプローチも知られている. 以下における構成の種類分けが適切な分類とは限らないし, またそれぞれの方法の間にはっきりした区別があるとは限らない. また得られる結果の見かけ上の強さもどの手法で構成するかで異なる. しかしながら, 肥田理論とその一般化への状況に関する見通しよい理解をするためには若干強引ながらもアプローチの違いを整理してみることは無意味ではないと信じている.

構成方法２ (ド・ラーム的方法)

モジュラー形式の空間 $M_k(\Gamma_1(Np^r);\mathbb{Z}_p)$ は $H^0(X_1(Np^r)_{\mathbb{Z}_p}, \omega^{\otimes k})$ と等しい. ここで, ω はアファインモジュラー曲線 $Y_1(Np^r)_{\mathbb{Z}_p} \subset X_1(Np^r)_{\mathbb{Z}_p}$ 上で定まる可逆層 $\omega|_{Y_1}(Np^r) = \pi_*\Omega^1_{\mathcal{E}/Y_1(Np^r)}$ (但し, $\pi : \mathcal{E} \longrightarrow Y_1(Np^r)$ は普遍楕円曲線, $\Omega^1_{\mathcal{E}/Y_1(Np^r)}$ は相対正則 1-形式の層とする) を拡張して得られる $X_1(Np^r)$ 上の可逆層である. ド・ラーム的方法とは $M_k(\Gamma_1(Np^r);\mathbb{Z}_p) = H^0(X_1(Np^r)_{\mathbb{Z}_p}, \omega^{\otimes k})$ の p 通常的部分 $H^0(X_1(Np^r)_{\mathbb{Z}_p}, \omega^{\otimes k})^{\mathrm{ord}}$ が重さ k やレベルにおける p のべき r が変動するときに p 進的な族をなすことを直接に示す方法である. Eichler-志村同型を通してベッチコホモロジー (これは群コホモロジーともみなせる) に移行しベッチコホモロジーをコントロールするのをベッチ的方法とよんだ. これに対比して, 今の方法をド・ラーム的方法とよぶことにする. 初期の論文 [Hi86a] がド・ラーム的方法であるが, 後の [Hi00], [Hi04] 等の文献もド・ラーム的方法で肥田変形を構成していると言える. ただ, [Hi00], [Hi04] 等の文献は, [Hi86a]

とは少し違った方法をとり, 高次元の代数群への一般化の見通しのためにより公理論的に整理された形で構成が展開している. (このあたりの違いの事情に関しては §3.2 でもコメントする)

構成方法３ (Eisenstein family による方法)
定理 1.9 で得られた Λ 進 Eisenstein 級数 $\mathcal{E} \in \Lambda_{\mathrm{ord},\mathcal{O}}[[q]]$ をとる. 今, 重さ $k_0 \geq 2$ をひとつ固定する. $S_{k_0}(\Gamma_1(Np);\mathbb{Z}_p)$ の元 $f \in \mathbb{Z}_p[[q]]$ をひとつとり, 積 $f\mathcal{E} \in \Lambda_{\mathrm{ord},\mathcal{O}}[[q]]$ をとると, これは既に (若干の技術的な修正のもとで) Λ 進カスプ形式となることに注意. 実際, 一般に勝手な重さ k のカスプ形式 f と勝手な重さ k' の Eisenstein 級数 $E_{k'}$ の積 $fE_{k'}$ は重さが $k+k'$ のカスプ形式である. [4] よって, f_i を $S_{k_0}(\Gamma_1(Np);\mathbb{Z}_p)^{\mathrm{ord}}$ の中でうごかすことによって, 多くの p 通常的な Λ 進カスプ形式たち $\{f_i\mathcal{E} \in \Lambda_{\mathrm{ord},\mathcal{O}}[[q]]\}$ が生成される. 一方で,

(Bdd) k が動くときに次元 $\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_p} S_k(\Gamma_1(Np);\mathbb{Z}_p)^{\mathrm{ord}}$ が k に関して bounded.

という条件があれば, $\{f_i\mathcal{E} \in \Lambda_{\mathrm{ord},\mathcal{O}}[[q]]\}$ たちが勝手な重さの p 通常的なカスプ形式を支配することがわかる. この条件は証明方法１で使った群コホモロジーの手法の一部だけを使って, $H^1_{\mathrm{par}}(\Gamma_1(Np), L_k(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}))^{\mathrm{ord}}$ の場合に対してのみ, 命題 A の証明で用いたような異なる重さに対する比較定理を示すだけで確かめることができることに注意したい. Λ 進モジュラー形式のレベルでも係数を使った人工的な定義でヘッケ作用素が定義されるので, $\{f_i\mathcal{E} \in \Lambda_{\mathrm{ord},\mathcal{O}}[[q]]\}$ によって $\Lambda_{\mathrm{ord},\mathcal{O}}$ 上生成される空間から固有値が入るように適当な $\Lambda_{\mathrm{ord},\mathcal{O}}$ の $\Lambda_{\mathrm{ord},\mathcal{O}}$ の有限次拡大 $\mathbb{H}$ をとって固有な Λ 進カスプ形式が得られる. これを用いれば, ガロア表現的な肥田変形も擬表現の方法で得ることもできる.

このような方法は, Wiles[Wi88] によって最初に実行され, 重さがパラレルなヒルベルトモジュラー形式のみからなる肥田変形が作られた. [5] Taylor の学位論文 [Tay88] におけるスカラーの重さを持つジーゲルモジュラー形式たちの肥田変形の構成も [Wi88] の方法を踏襲している. また, 肥田による教科書はこの方針で肥田変形の構成がなされている ([Hi93] の 7 章参照).

3. 一般の簡約代数群の肥田理論

肥田理論は 86 年出版の 2 本の論文で上で述べたような最も基本的な $\mathrm{GL}(2)_{/\mathbb{Q}}$ において確立された. 粗く言うと, 論文 [Hi86b] でベッチ的な証明が与えられ, もう片方 [Hi86a] でド・ラーム的な証明が与えられた.

3.1. ベッチ的方法 (群コホモロジーの方法) による一般化の歴史と現状. ベッチ的な証明は考え方が見やすく直接的にガロア表現と結びつくので, 前節ではベッチ的な証

[4] もちろん仮にヘッケ作用に関する固有形式 f をとっても $fE_{k'}$ は固有形式であるとは限らないが, 今は f は固有形式であるかどうかはあまり気にしていない.

[5] 正確には, Wiles の論文では Eisenstein 級数でなくテータ級数をかけることで異なる重さを結びつけている.

明の視点から解説を行った. $\mathrm{GL}(2)_{/\mathbb{Q}}$ 以外の高次元の代数群への肥田理論の一般化もベッチ的方法によるものがいくつかある. (例えば, [Hi95], [TU99] など)

ただ, このようなベッチ的方法では, 一般には「コホモロジーの消滅問題」を主とした困難が生じる. この問題をもう少しはっきり照らし出すためにベッチ的方法での一般の簡約代数群 G の肥田変形の構成の状況に軽く触れたい.

ある簡約代数群 G の肥田理論を考えたいとする. 簡単のために G が d 次元の志村多様体をもつとして, レベル Np^r での志村多様体を $S_G(Np^r)$ とする. 考えるレベル構造の選び方などの正確な設定を決めることはかなりの労力を要するので, 以下, 設定は大雑把にして話をすすめたい. G のモジュラー形式の重さ k は, G の導来群 G' の極大トーラスの指標であり, 整数の組 $k=(k_1,\cdots,k_d)$ であることを思い出しておく. M を勝手な可換環とする. 考える重さ k に付随して, $S_G(Np^r)$ 上の M を係数とする局所系 $\mathcal{L}_k(M)$ があり, 中間次数 d でのベッチコホモロジーへの Eichler-志村写像:

$$S_k(Np^r) \hookrightarrow H^d(S_G(Np^r);\mathcal{L}_k(\mathbb{C}))$$

が存在する. 前節で展開した $G=\mathrm{GL}(2)_{/\mathbb{Q}}$ では, $d=1$, k は 2 以上の整数であり, $\mathcal{L}_k(M)$ は, 2 次元スタンダード表現の $k-1$ 回の対称テンソル積表現 $\mathrm{Sym}^{k-2}(M^{\oplus 2})$ からくる $Y_1(Np^r)$ 上の局所系であったことを思い出しておきたい. $\mathrm{GL}(2)_{/\mathbb{Q}}$ における証明方針の真似をするならば, ベッチ的な証明においては, 係数を p 進的にして

$$H^d(S_G(Np^r);\mathcal{L}_k(R)) \quad (R=\mathbb{Z}_p,\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z},\cdots) \tag{8}$$

を考え, 命題 A や命題 B の類似を行うことが問題となる. 命題 A の類似を確立するには, 制限写像 :

$$H^d(S_G(Np^r);\mathcal{L}_k(\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z})) \longrightarrow H^d(S_G(Np^{r+1});\mathcal{L}_k(\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z})) \tag{9}$$

の Kernel, Cokernel の p 通常的な部分が消えることを示さなければならない. スペクトル系列を調べると, 制限写像の Kernel, Cokernel には非中間次数 $i\neq d$ のコホモロジー $H^i(S_G(Np^r);\mathcal{L}_k(\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}))$ の寄与が入ってくる. $d>1$ の場合は消滅するかどうかわからない非中間次数 $i\neq d$, $0\leq i\leq 2d$ のコホモロジーがたくさんあり, (9) の Kernel, Cokernel の p 通常的部分が消滅するかわからなくなる. これが上で触れた「コホモロジーの消滅問題」から来る困難である. ($G=\mathrm{GL}(2)_{/\mathbb{Q}}$ のときは, $d=1$ であり $i=0,2$ におけるコホモロジーは非常によくわかるのでこのような問題はなかったことに注意したい).

肥田氏らによる次の仕事 I, II がベッチ的方法で何ができて何が難しいのかを示している.

I. 低い次元の志村多様体に移行して解決できる場合

80 年代後半, 肥田氏の論文 [Hi88], [Hi89a], [Hi89b] は, $\mathrm{GL}(2)_{/\mathbb{Q}}$ で成功をおさめた理論を d 次総実代数体 F 上の代数群 $\mathrm{GL}(2)_{/F}$ に付随したヒルベルトモジュラー形式へと一般化した. 総実体 F 上の適当なレベル構造でレベル $\mathfrak{N}p^r$, 重さが $k=(k_1,\cdots,k_d)$ をもつカスプ形式 $S_k(\mathfrak{N}p^r)_{/F}$ を考えるとヒルベルトモジュラー多様体 $S_{\mathrm{GL}(2)_{/F}}(\mathfrak{N}p^r)$ という d 次元代数多様体のコホモロジーに Eichler-志村写像

$$S_k(\mathfrak{N}p^r)_{/F} \hookrightarrow H^d(S_{\mathrm{GL}(2)_{/F}}(\mathfrak{N}p^r);\mathcal{L}_k(\mathbb{C})) \tag{10}$$

がある. 素朴にこのような方向で考えると, 重さ k とレベルの p べきが変わるときの $H^d(S_{\mathrm{GL}(2)_{/F}}(\mathfrak{N}p^r);\mathcal{L}_k(\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}))$ をコントロールすることが問題となる. スペクトル系列の議論によって, $i\neq d$ のときにベッチコホモロジー $H^i(S_{\mathrm{GL}(2)_{/F}}(\mathfrak{N}p^r);\mathcal{L}_k(\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}))$ の適当なヘッケ作用で分解した部分が消滅することが必要となる. このような消滅定理が知られているのは重さ k が正則であるときのみである.

Jacquet-Langlands-清水対応によると, $S_k(\mathfrak{N}p^r)_{/F}$ は, 適当な局所条件をみたす F 上の四元数環 Q に対するカスプ形式の空間 $S_k(\mathfrak{N}p^r)_{/Q}$ と同一視される. 四元数環 Q が分裂する F の無限素点の数を $d^*\leq d$ とすると, $S_k(\mathfrak{N}p^r)_{/Q}$ の次元は d^* で, この場合も Eichler-志村写像がある:

$$S_k(\mathfrak{N}p^r)_{/Q}\hookrightarrow H^{d^*}(S_Q(\mathfrak{N}p^r);\mathcal{L}_k(\mathbb{C})). \tag{11}$$

$[F:\mathbb{Q}]$ が奇数のときは $d^*=1$, $[F:\mathbb{Q}]$ が偶数のときは $d^*=0$ ととれることが知られており, 次元が 1 以下のベッチコホモロジーをコントロールする問題はスペクトル系列の議論が簡単となるのである.

ヒルベルトモジュラー多様体の情報を使うために Jacquet-Langlands-清水対応を使わずに肥田変形を構成する場合は, 現状では例えば以下のような条件付きの結果のみが可能である.

(i) Dimitrov の学位論文 [Di05] は, 与えられたヒルベルトカスプ形式の剰余表現の持ち上げに関する非常に強い条件の下で, Fontaine-Laffaile 理論などの p 進ホッジ理論の結果を用いて, p 進係数ベッチコホモロジーに対する欲しい消滅定理を示している. 考えている条件を満たす剰余表現に対応するカスプ形式の成分に制限するとコントロール定理 (命題 A,B の類似) をヒルベルトモジュラー形式のコホモロジーに対して直接示すことができてそのような特別な成分では肥田変形が構成できることがわかる.

(ii) 以下の II でも述べるように正則な重さ k をもつときには, $H^i(S_{\mathrm{GL}(2)_{/F}}(\mathfrak{N}p^r);\mathcal{L}_k(\mathbb{C}))$ に対して消滅定理が成り立つことが知られている. このような重さ k に限れば命題 A の類似が成り立つ. 例えば, F が実 2 次体のときは重さ $k=(k_1,k_2)$ が正則なことは, $k_1\neq k_2$ を意味するので最終的にはこのような重さの部分だけはコントロールするが重さがパラレルなヒルベルト形式からなる部分はコントロールしないような弱い形の定理が示せることになる.

II. 高次元におけるコホモロジーの消滅を仮定してしまう場合

一般の高いランク d をもつ簡約代数群 G においては中間次元以外の次数 $i\neq d$ のコホモロジーの消滅性は証明されていない. が, 考える局所系 $\mathcal{L}_k$ の重さが正則 (regular) なときには Vogan-Zuckerman, Li-Schwermer, Saper らによって調和解析的議論を用いてコホモロジーの消滅定理:

$$H^i(S_G,\mathcal{L}_k(\mathbb{C}))=0\quad i\neq d$$

が得られている. 代数群 $\mathrm{SL}(n)$ の場合の肥田氏の仕事 [Hi95], 代数群 $\mathrm{GSp}(4)$ の場合の [TU99] などにおいては, 固定する重さ k が正則なときにはスペクトル系列の計算が十分うまく扱えて, 命題 A の類似が証明できる. かくして, 正則な重さ k のみを扱える弱い意味で肥田理論を構築している. (先のヒルベルトモジュラーの場合と同様に, $\mathrm{GSp}(4)$ においても重さ $k=(k_1,k_2)$ が正則より $k_1\neq k_2$ が成り立つ. $\mathrm{GSp}(4)$ におい

てはスカラー値のモジュラー形式は全て排除される) Mauger による学位論文 [M04] もこの方向性を押し進めて, 適当な条件を満たす広範な代数群に対して regular な重さをもつ場合には弱い意味での肥田理論を構築している.

3.2. **ド・ラーム的方法による一般化の歴史と現状.** 90 年代の後半から肥田氏は微分形式としてのモジュラー形式やその無限遠 q での展開級数をより直接的に扱うようなド・ラーム的な方法でも肥田理論の一般化を試みている. $X_1(M)$ 上に定義される "automorphic line bundle" ω を用いて, 環 R 上では

$$M_k(\Gamma_1(M);R) = H^0(X_1(M)_R, \omega^{\otimes k})$$

としてモジュラー形式を代数的に定義できる. 前節の構成方法 2 で述べたように, 微分形式のコホモロジーを直接コントロールするのをド・ラーム的な方法とよぶことにしていた. [Hi86a] においては, 次のような Jachnowitz による mod p モジュラー形式の有限性定理などを利用して肥田変形が構成されていた.

定理 3.1 (Jachnowitz)**.** $(N,p)=1$ のときに

$$\left(\bigoplus_{0\le k<\infty} M_k(\Gamma_1(N);\mathbb{F}_p)\right)^{\mathrm{ord}} = \left(\bigoplus_{0\le k<p-1} M_k(\Gamma_1(N);\mathbb{F}_p)\right)^{\mathrm{ord}}$$

である.

後の仕事 [Hi00], [Hi04] においても, ド・ラーム的な方法がなされているが, 他の簡約代数群に一般化しやすいように, Jachnowitz の結果に頼らず, 使う性質を公理論的に整理してド・ラーム的な方法が展開されている. 現実的には, $\dim M_k(\Gamma_1(Np))^{\mathrm{ord}}$ が k に関して有界であることなど, 一部群コホモロジーを使うことで確かめられる公理もあるが, $X_1(N)^0_{\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}}$ を ordinary locus からなるアファインスキームとするとき,

$$M_k(\Gamma_1(Np^r);Z/p^s\mathbb{Z}) \subset H^0(X_1(N)^0_{\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}}, \omega^{\otimes k}\otimes \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}) \qquad (12)$$

であることにしたがって $H^0(X_1(N)^0_{\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}}, \omega^{\otimes k}\otimes \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})$ を (重さ k とレベルの p べき r の変動に関して) コントロールし, (12) の通常部分をとることで

$$M_k(\Gamma_1(Np^r);Z/p^s\mathbb{Z})^{\mathrm{ord}} = H^0(X_1(N)^0_{\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}}, \omega^{\otimes k}\otimes \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})^{\mathrm{ord}}$$

をコントロールしている.

志村多様体をもつような高次元の簡約代数群 G でのモジュラー形式では, 肥田氏による書籍 [Hi04] やその時期に書かれた同氏による論文に展開されている. 具体的には, ヒルベルトモジュラー群, シンプレクティック群, ユニタリ群などの場合もド・ラーム的な方法での一般化が追求されている. これらの場合にも志村多様体上の "automorphic vector bundle", "Eichler-志村写像" があるが, 同じ流れで話をすすめていくには楕円モジュラーの場合に比べて多くの技術的な困難がある. ここではこれ以上立ち入らないことにするが, 肥田氏による本 [Hi04] にこのような事柄が論じられいてるので眺めていただきたい. また, 本論説の筆者による雑誌「数学」（日本数学会）２００８年７月号記載原稿での同書の書評「p-adic Automorphic forms on Shimura Varieties の書評 —肥田理論の紹介—」も参照されたい.

最後に, 本稿に目を通してタイプミスや読みにくい場所を丁寧に指摘していただいた森山知則氏, 山上敦士氏に感謝申し上げたい.

4. コメント付き参考文献リスト

ここでは, 通常的 (ordinary) なモジュラー形式（またはそれに伴うヘッケ環やガロア表現）の p 進変形を扱う肥田理論に関連する文献をあげる (アルファベット順).

楕円モジュラー又はヒルベルトモジュラーの場合の肥田理論の基礎に関する論文

[Em99] M. Emerton, *A new proof of a theorem of Hida*, Int. Math. Res. Not, 1999, No.9, 453-472, 1999.
肥田理論の新証明とタイトルにあるが, 実際は重さ 2 のモジュラー形式に対応するベッチコホモロジー (あるいは群コホモロジー) がレベルにおける p のべきを上げるときにコントロールされること (命題 A の $k = 2$ の場合) のみに限って [Hi86b] の行間を埋めているような少しだけ down-to-earth な証明を書いている. 異なる重さの比較 (命題 B の方) は全く触れていない.

[Hi86a] H. Hida, *Iwasawa modules attached to congruences of cusp forms*, Ann. Sci. Ec. Norm. Super. (4) 19, No. 2, 231-273, 1986.
下の [Hi86b] とともに肥田理論の最も初期の論文である. ガロア表現による肥田理論は現れないが, 論文の 3 節でヘッケ環やモジュラー形式の肥田変形の定理を定式化している. Jachnowitz による mod p モジュラー形式の有限性定理を使いつつ p 進モジュラー形式を直接コントロールするド・ラーム的方法をとっている.

[Hi86b] H. Hida, *Galois representations into $GL_2(\mathbb{Z}_p[[X]])$ attached to ordinary cusp forms*, Invent. Math. 85, 545-613, 1986.
文献 [Hi86a] ではガロア表現は登場していなかった. この論文では [Hi86a] で得られている結果をベッチコホモロジー（群コホモロジーとも同型）を用いた別証明をするとともに, 肥田変形に対応して大きなガロア表現が構成された.

[Hi88] H. Hida, *On p-adic Hecke algebras for GL_2 over totally real fields*, Ann. Math. (2) 128, No.2, 295-384 (1988).
楕円モジュラーで確立した肥田理論を総実体に拡張する論文. ordinary な部分のみを扱っているので, ヒルベルトモジュラー形式の重さ $(k_1, \cdots, k_d)$ はパラレルにしか変形しない. ヒルベルトモジュラー多様体のコホモロジーの消滅定理などの未解決な問題を避けるために次元の低い志村多様体に移行するアイデアがとられている. 特に考えている総実体の有理数体上の拡大次数が偶数のときには代数多様体としては次元が 0（つまり, 各既約成分が点）である志村多様体を扱うことになる. こういった 0 次元の志村多様体を有効に扱う議論は後々p 進モジュラー形式に関する様々な研究で活発に用いられるようになり, そのような考え方の先駆けともなっている.

[Hi89a] H. Hida, *On nearly ordinary Hecke algebras for $GL(2)$ over totally real fields*, Algebraic number theory - in honor of K. Iwasawa, 1987, Adv. Stud. Pure Math. **17**, 139-169, 1989.

[Hi88] の続編である． [Hi88] では p 進ヒルベルトモジュラー形式の重さ $k = (k_1, \cdots, k_d)$ をパラレルにしか動かせず, ordinary な肥田理論（パラメーターの変数は１つ）であったのを, $(k_1, \cdots, k_d)$ が自由に動かせる $d+1$ 変数（Leopoldt 予想を仮定しなければ厳密にはもう少し変数の数が多いかもしれない）概通常的 (nearly ordinary) 肥田変形へと一般化を行ったもの.

[Hi89b] H. Hida, *Nearly ordinary Hecke algebras and Galois representations of several variables*, Algebraic analysis, geometry, and number theory, Proc. JAMI Inaugur. Conf., Baltimore/MD (USA) 1988, 115-134, 1989.
同じく, [Hi88] の続編である．$d+1$ 変数概通常的肥田変形におけるガロア表現の存在やその p での局所的性質について論じている.

[Hi07] H. Hida, *Control of nearly ordinary Hecke algebras*, Lecture notes of a talk at Luminy Summer school on Serre's conjecture (delivered on 7/17/2007), available at http://www.math.ucla.edu/ hida/.
総実体の場合にヘッケ環がコントロール定理をみたすことなどをまとめた短いノート．ある公理をみたす状況から出発してその公理から基本定理を示すというようにして証明に必要な本質を見やすくする試みがなされている．ヒルベルトモジュラーの場合はすべての状況をカバーしているが, 楕円モジュラーの場合は、コンパクトな志村多様体と結びつかない場合があるのですべてを扱っているわけではないことに注意したい.

[MW86] B. Mazur, A. Wiles, *On p-adic analytic families of Galois representations*, Compos. Math. 59, 231-264, 1986.
ヘッケ環の Gorenstein 性や剰余表現の存在証明などをしっかり記述している．また, 適当な条件のもとで肥田変形の自己同型群へのガロア群の像が非常に大きいことを, Boston による Appendix の結果を用いて示している．また, 肥田のガロア変形の重さ１での特殊化は Hodge-Tate とならないことがあるという現象を提示して肥田変形に新しい知見を加えている.

[Oh95] M. Ohta, *On the p-adic Eichler-Shimura isomorphism for Λ-adic cusp forms*, J. Reine Angew. Math. 463, 49-98 (1995).
太田氏の論文は特に Λ 進モジュラー形式の言葉で肥田理論を丁寧に記述するという点で肥田, Wiles の文献を補っている．太田氏にはこれ以降にも肥田理論を精密に調べる論文を多数出しており, それによって [MW84], [Wi90] よりも精密な形で岩澤理論への応用を得ている．筆者の力不足と時間不足によりそれらの続編を挙げて相互関係などを紹介することができなかった．興味のある読者は mathscinet 等でそれ以後の論文も調べて読んでみるとよいかもしれない.

[Til87] J. Tilouine, *Un sous-groupe p-divisible de la Jacobienne de $X_1(Np^r)$ comme module sur l'algebre de Hecke*, Bull. Soc. Math. Fr. 115, 329-360, 1987.
タイトルにあるように, mod p のダイヤモンド作用素に関する適当な条件の成分において, §2 の命題 C の (1) のようなモジュラーなガロア表現のヘッケ環上での加群としての精密な構造を得ている.

[Wi88] A. Wiles, *On ordinary λ-adic representations associated to modular forms*, Invent. Math. 94, No.3, 529-573, 1988.

パラレルな重さのヒルベルトモジュラー形式のみからなる１変数の肥田変形を構成している. 肥田変形の構成には, [Hi86a], [Hi86b] のいずれとも異なって, テータ級数を普通のカスプ形式にかけることで異なる重さを結びつける第３の方法がとられている. (§2.5 も参照のこと) ガロア表現の族を擬表現を使って構成するアイデアが初めて提示された論文でもある. この方法によって, 従来は, 考える保型表現にある局所的な条件が必要であった Tunnell, Rogawski, 太田によるヒルベルトモジュラー形式のガロア表現の構成に対して, p で通常的なヒルベルトモジュラー形式に対しては無条件に p 進ガロア表現が構成されることを示した.

楕円モジュラーやヒルベルトモジュラー以外に肥田変形を一般化するための論文

(一般化に関しては, 全てを網羅することはできないので主に２０００年以前の仕事のみ集めている. 例えば, 書籍 [Hi04] とその前後に出た肥田氏の論文のいくつかにド・ラーム的方法での一般化が論じられているが, それらは全く引用しなかった. また, p 通常的でない場合の Coleman 理論や Eigenvariety の理論も, 近年は盛んに高次元の簡約代数群で調べられており, この周辺の仕事を p 通常的な状況に制限して考えても肥田理論の一般化を論じていることになると思われる. このあたりの論文も今回はまとめられなかった.)

[M04] D. Mauger, *Algèbres de Hecke quasi-ordinaires universelles*, Ann. Sci. Ècole Norm. Sup. (4) 37, no. 2, 171–222. 2004.

[MT02] A. Mokrane, J. Tilouine, *Cohomology of Siegel varieties with p-adic integral coefficients and applications*, Cohomology of Siegel varieties. Astérisque No. 280, 1–95, 2002.

p 進的な道具だてによって, ジーゲルモジュラー多様体の p 進係数をもつコホモロジーの中である強い条件をもつ剰余表現に対応する成分にはねじれがないことを示している. これを用いると, 同じ条件下で肥田理論のベッチ的なコントロール定理が導かれる応用がある.

[Hi95] H. Hida, *Control theorems of p-nearly ordinary cohomology groups for* $\mathrm{SL}(n)$, Bulletin de la S.M.F., tome 123-3, pp. 425–475, 1995.

[Tay88] R. Taylor, *On congruences between modular forms*, PhD. thesis, Princeton University 1988. http://abel.math.harvard.edu/ rtaylor/

GSp(2g) のスカラー値のモジュラー形式だけからなる１変数の肥田変形の構成, 虚２次体上の GL(2) の肥田変形の構成という主に２つのテーマがある. 最初のジーゲルモジュラーの肥田変形の場合には Eisenstein 級数やテータ級数などよい p 進ファミリーをなすものを掛けてやることで異なる重さを結びつける [Wi88] の方法がとられている. 一方で虚２次体上の GL(2) に対しては, その方法は使えず [Hi86b] や本論説と同様の群コホモロジーの方法によって肥田変形を構成している.

[TU99] J. Tilouine, E. Urban, *Several-variable p-adic families of Siegel-Hilbert cusp eigensystems and their Galois representations*, Ann. Sci. Ec. Norm. Super. (4) 32, No. 4, 499-574, 1999.

教科書で肥田理論に関するもの

[Hi93] H. Hida, *Elementary theory of L-functions and Eisenstein series*, London Mathematical Society Student Texts. 26. Cambridge: Cambridge University Press. 1993.
肥田理論に関する最初の教科書. 特に７章においてモジュラー形式の空間のコントロール定理が示されている. また, ７章には擬表現でガロア表現の族を構成する理論に関しても解説がある.

[Hi00] H. Hida, *Geometric modular forms and elliptic curves*, Singapore: World Scientific. この本の大半はスキーム上の楕円曲線やモジュラー曲線のモジュライ問題などの代数的な扱いやモジュラー形式のガロア表現に割かれており, また最後の章は Wiles の仕事の概説に割かれている. そういった意味では肥田理論の教科書ではないが. 途中の３章の Vertical control theorem の節で肥田理論の証明をあたえている. また, この本での証明は, 本記事や論文 [Hi86b] のような群コホモロジー的な手法ではなく [Hi86a] のド・ラーム的方法をとっている. ただ, [Hi86a] における方法を整理して公理的にまとめている.

[Hi04] H. Hida, *p-Adic Automorphic Forms on Shimura Varieties*, Springer Monographs in Mathematics, 2004.
９０年代後半から２０００年代の初期にかけて実行された肥田理論の様々な簡約代数群への一般化をまとめた本. ベッチ的方法ではなく, ド・ラーム的方法の視点での一般化を扱っており, $\mathrm{GL}(2)_{/\mathbb{Q}}$ の場合に [Hi00] で公理化した方法を他の代数群へと適用している. その際に大事になる井草塔の既約性の説明などにも紙面を割いている.

[Hi06] H. Hida, *Hilbert Modular Forms and Iwasawa Theory*, Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, 2006.

それ以外の関連参考文献や応用文献など

[Ch] 千田雅隆, *Galois* 表現の基礎 II, 本報告集
この論説の §2.2 で楕円モジュラー形式に付随するガロア表現とは何かを正確に述べ定理を紹介している. 一口に「モジュラー形式のガロア表現を構成する」と言っても構成の強さにいくつかのクラスがある. そういった繊細な意味についてや歴史的なことについて軽く説明されている.

[Di05] M. Dimitrov, *Galois representations modulo p and cohomology of Hilbert modular varieties*, Ann. Sci. École Norm. Sup. 38, Issue 4, 505-551, 2005.

与えられた剰余表現に対するある種の強い持ち上げの仮定の下で, ヒルベルトモジュラー多様体の p 進係数のエタールコホモロジーが中間次数以外で消えることを示している. ヒルベルトモジュラー形式の肥田理論に応用ができる. ジーゲルモジュラーの場合に先行して存在した同様な研究 [MT02] を手本として, ヒルベルトモジュラーの場合に実行している.

[Hi96] H. Hida, *On the search of genuine p-adic modular L-functions for GL(n)*, Mém. Soc. Math. Fr., Nouv. Sér. 67, 1996.
肥田理論で得られた変形に対して付随する p 進 L 函数を含めて, 一般的な概通常なガロア変形空間があったときに付随する p 進 L 函数が存在するとしたらどのような予想を満たすべきかということの試論である. 特に L 函数の特殊値に関係するはずの p 進周期や複素周期についての洞察や問題点の提起がなされている.

[Ka78] N. Katz, *p-Adic L-functions for CM fields*, Invent. Math. 49, 199-297, 1978.
正則とは限らない Eisenstein 級数の p-進族の CM 点での値をとることで CM 体の p 進 L 函数を構成している.

[MW84] B. Mazur, A. Wiles, *Class fields of abelian extensions of* $\mathbb{Q}$, Invent. Math. 76, 179-330, 1984.
有理数体上のアーベル拡大における岩澤主予想を解決した論文. その過程でモジュラー曲線のヤコビ多様体の p での reduction を調べている. 実際, section 3 に局所ラングランズ理論などを用いて p で new であるようなカスプ形式に対応するヤコビアンの成分が p で potentially good reduction をもつことの証明が記されている. p で ordinary なモジュラー形式のガロア表現はガロア表現の意味で p で ordinary となることも示されている.

[M89] B. Mazur, *Deforming Galois representations*, Galois groups over $\mathbb{Q}$, Proc. Workshop, Berkeley/CA (USA) 1987, Publ., Math. Sci. Res. Inst. 16, 385-437, 1989.
最初にガロア表現の変形理論を提唱した論文.

[Sa] 佐々木秀, *Coleman's theory of p-adic modular forms*, 本報告集
本稿で論じている肥田変形を p 通常的でないモジュラー形式で行う Coleman の理論がある. 佐々木氏の原稿の最後の Theorem 13 の周辺にそれらが紹介されている.

[S68] G. Shimura, *An l-adic method in the theory of automorphic forms*, unpublished text of a lecture at the conference Automorphic functions for arithmetically defined groups, Oberwolfach, Germany, 1968. (Collected papers of Goro Shimura Volume II に採録)
重さ $k \geq 2$ のカスプ形式に付随した l 進ガロア表現の構成問題を群コホモロジーと l べきの合同を用いて, 重さ 2 のカスプ形式のガロア表現の構成 (この場合はヤコビ多様体のテイト加群の一部として得られる) に帰着する仕事である. まさに, 肥田理論の群コホモロジー的方法の源泉のひとつと言える.

[Ya] 山上敦士, *Eigencurve* について, 本報告集
[Sa] でも触れたような肥田理論の一般化をさらに押し進めて, 離散的に沢山存在する古典的なモジュラー形式からなるガロア表現を「ガロア表現の変形」を絡

めて理解しようとする幾何的な理論である. 最初の部分で, 擬表現についても軽く説明されている.