Non-existence of certain Galois representations with a uniform tame inertia weight *

九州大学大学院数理学府数理学専攻 D2　小関 祥康

平成 22 年 2 月 4 日

1　導入

代数体上の「良い」性質を持つものはあまり存在しないのではないかという哲学は様々な場所で見ることが出来る. 有名な例としては

- Fontaine-Mazur 予想 ([FM]),
- Hermite-Minkovski の定理 (代数体上の n 次拡大で, 固定された素点の集合の外で不分岐なものは同型を除いて有限個しか存在しない),
- Shafarevich 予想 (= Faltings の定理 : 代数体上のアーベル多様体で, 固定された素点の有限集合の外で good reduction を持つものは同型を除いて有限個しか存在しない),
- $\mathbb{Q}$ 上至る所 good reduction をもつアーベル多様体は存在しない ([Fo])

等が挙げられるだろう. もちろん, 上に挙げたものは一部に過ぎない. ここでは詳しい例などは省かせていただくが, このような「有限である」という性質, あるいはもっと強く「存在しない」という性質は多くの場合に面白い応用を持っており, 実に興味深い研究対象であるといえる. 本稿では, Rasmussen と Tamagawa による共著論文 [RT] において提唱された「ある特別な性質を持つアーベル多様体は有限個しか存在しない」という類の予想を, Galois 表現を用いることで semistable reduction をもつアーベル多様体に限った場合に解決したという話をしたい. その際より一般に, ある性質を持つ Galois 表現の非存在性定理 (=定理 4) を示すことで, いくつか別の応用を得ることが出来た. その Galois 表現の非存在性定理から見つかる応用としては, 大雑把に言うと以下の三つが現在見つかっている :

(1) Rasmussen-Tamagawa 予想の semistable reduction をもつ場合の (少し一般化したものの) 解決,
(2) 楕円曲線の mod ℓ 表現の既約性問題,
(3) 代数体上射影的で滑らかな代数多様体の ℓ 進エタールコホモロジーの剰余表現の表現行列についての性質.

これらの詳細は後ほど§ 4 で説明する.

記号 : 以下の記号は本文中で断りなく用いる.

ℓ, ℓ_0 : 異なる素数,

---

*本稿は第 17 回 (2009 年度) 整数論サマースクール「l 進ガロア表現とガロア変形の整数論」での院生・ポスドクの時間において講演した内容を補足し, まとめたものである.

著者は日本学術振興会からの支援を受けています (DC2).

e-mail: `y-ozeki@math.kyushu-u.ac.jp`

g, n, r, w : 0 以上の整数,
K : 有理数体 $\mathbb{Q}$ の有限次拡大,
$\bar{K}$: K の代数閉包,
$G_K := \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$,
v : K の有限素点,
e_v : v での絶対分岐指数,
I_v : v での惰性群,
Frob_v : v での代数的フロベニウス,
q_v : v での剰余体の位数,
V : G_K の n 次元 $\mathbb{Q}_\ell$ 表現,
$\bar{V}$: V の剰余表現.

2 Rasmussen-Tamagawa 予想

K に 1 の ℓ 乗根を全て添加した体 $K(\mu_\ell)$ 上の, ℓ の外で不分岐な最大 pro-ℓ 拡大を $\tilde{K}_\ell$ で表すことにする. このとき, 集合 $\mathcal{A}(K, g, \ell)$ を, K 上の g 次元アーベル多様体 A の同型類で以下の (a) を満たすものからなるものとする:

(a) $K(A[\ell^\infty]) \subset \tilde{K}_\ell$.

この集合に含まれるアーベル多様体 A は, ℓ の外で good reduction を持つことがわかるので, Shafarevich 予想 (= Faltings の定理) から $\mathcal{A}(K, g, \ell)$ は有限集合となっていることが分かる. しかし, この条件 (a) は単に ℓ の外で good reduction をもつというだけでなく (これだけでも十分に強い仮定だが), それよりもさらに強い仮定をしていることから, ただ有限というだけではなく「本当に少ない」というような気がしてくる. Rasmussen と Tamagawa は, 実はこの集合は全ての素数 ℓ を走らせて (disjoint に) 和集合をとっても有限集合になるという予想を立てた :

予想 1 ([RT], Conjecture 1)**.** $\mathcal{A}(K, g) := \{(A, \ell) \mid [A] \in \mathcal{A}(K, g, \ell)\}$ は有限集合. 言い換えると, 十分大きい ℓ に対しては, $\mathcal{A}(K, g, \ell)$ は空集合.

この予想は [RT] において, 以下のような楕円曲線の場合には解決している.

(1) $K = \mathbb{Q}, g = 1$,

(2) K : 類数 1 の虚二次体ではない二次体, $g = 1$.

一般に $\mathcal{A}(K, g, \ell)$ に属する楕円曲線に付随して得られる mod ℓ 表現が可約であるという以下の補題 2 を用いることで, モジュラー曲線の有理点問題に帰着できる. この事実を用いることにより, 上の二つの結果が証明される.

補題 2 ([RT], Lemma 3)**.** *任意の $A \in \mathcal{A}(K, g, \ell)$ に対して, G_K の mod ℓ 表現 $A[\ell]$ は次のような G_K 作用で安定な filtration をもつ :*

$$0 = \bar{V}_0 \subset \bar{V}_1 \subset \cdots \subset \bar{V}_{2g-1} \subset \bar{V}_{2g} = A[\ell].$$

ここで, $\dim_{\mathbb{F}_\ell} \bar{V}_i = i$, $\bar{V}_i / \bar{V}_{i-1}$ への G_K 作用は mod ℓ 円分指標で与えられる.

論文 [RT] には上の補題の $K = \mathbb{Q}$ の場合のみ証明されているが, 全く同様の証明により一般の K に対しても証明できる. 予想 1 を, $\mathcal{A}(K, g, \ell)$ 内のアーベル多様体の Tate 加群が持っている性質を特徴付けることにより, 一般の Galois 表現の問題に置き換えて解決したい.

3　主定理

主定理を述べるための準備をしよう. まずはいくつかの幾何的問題に対して「良い」関係を持つ Galois 表現の集合を定義したい. ここで述べた「良い」というのは, 例えば semistable reduction をもつ $\mathcal{A}(K, g, \ell)$ 内のアーベル多様体の ℓ 進 Tate 加群などが持つ性質である. 記号を簡略化するために $\bullet := (n, \ell_0, r, w)$ と置く.

定義 3. $\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(G_K)^\bullet$ を次の条件 (G-1), (G-2), (G-3), (F) を満たす G_K の n 次元 $\mathbb{Q}_\ell$ 表現 V 全体の集合とする：
(G-1) 任意の K の有限素点 $v \mid \ell$ に対して, V は v で semistable で Hodge-Tate weights は $[0, r]$ 内にある.
(G-2) ある K の有限素点 $v_0 \mid \ell_0$ が存在して,
 (a) V は v_0 で不分岐,
 (b) $\det(T - \mathrm{Frob}_{v_0}|V) \in \mathbb{Z}[T]$,
 (c) 上の特性多項式の根の複素絶対値はすべて $q_{v_0}^{w/2}$.
(G-3) 任意の K の有限素点 $v \nmid \ell$ に対して, I_v は $\bar{V}$ に unipotent に作用.
(F) $\bar{V}$ は次のような G_K の作用で安定な filtration を持つ：

$$0 = \bar{V}_0 \subset \bar{V}_1 \subset \cdots \subset \bar{V}_{n-1} \subset \bar{V}_n = \bar{V},\ \dim_{\mathbb{F}_\ell} \bar{V}_i = i,\ 0 \le i \le n.$$

上の (G-$*$) の “G” と (F) の “F” はそれぞれ “geometric” と “filtration” の頭文字からきている. 例としては, K 上滑らかな射影代数多様体 X で

(1) K 上全ての有限素点で semistable reduction を持ち,

(2) ℓ_0 上のある K の素点で good reduction をもつ,

なる性質を持つものを考えた際に, その w 次の ℓ 進エタールコホモロジー $H^w_{\text{ét}}(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ の dual が満たしているような性質が (G-1),(G-2),(G-3) である. (F) は $n = 2$ の場合には単に剰余表現が可約と主張しているに過ぎない. また, 性質 (F) が成立するか否かは Brauer-Nesbitt の定理から V の剰余表現 $\bar{V}$ の選び方には依らないということにも注意しておこう.

我々の主定理は Rasmussen-Tamagawa 予想のように, この表現の集合 $\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(G_K)^\bullet$ が ℓ が十分大きく, かつ K で分解しないときには空集合になる, というものである.

定理 4 ([O]). *$K, \bullet$ にのみ依る (具体的に計算可能な) 定数 $C = C(K, \bullet) > 0$ が存在して, $\ell > C$ かつ ℓ は K で分解しないならば $\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(G_K)^\bullet$ は空集合.*

この定理は, 本質的には次の命題を示すことにより直ちに従う.

命題 5 ([O]). *$K, \bullet$ にのみ依る (具体的に計算可能な) 定数 $C' = C'(K, \bullet) > 0$ が存在して, $\ell > C$ かつ ℓ は K で分解しないならば, $V \in \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(G_K)^\bullet$ の任意の ℓ 上の K の有限素点 v における tame inertia weights は $e_v w/2$ のみ.*

この命題は Caruso [Ca] によって証明された整 p 進ホッジ理論の結果を用いることで, 剰余表現の表現行列の対角成分の情報がある程度得られることに着目することで証明される. Tame inertia weights については [Se], Chapter 1 を参照していただきたい. 命題 5 の主張は, 条件 (F) により存在する V の剰余表現 $\bar{V}$ の filtration

$$0 = \bar{V}_0 \subset \bar{V}_1 \subset \cdots \subset \bar{V}_{n-1} \subset \bar{V}_n = \bar{V}$$

の商 $\bar{V}_i/\bar{V}_{i-1}$ への $v \mid \ell$ での惰性群 I_v の作用がレベル 1 の基本指標の $e_v w/2$ 乗で与えられるということを意味する. 特に, $e_v w/2$ は整数である必要があることから定理 4 (の一部) が従う.

4 応用

前章で述べた主定理がどのような幾何学的な問題に応用可能なのかということをこの章で見てみることにする.

4.1 Rasmussen-Tamagawa 予想

定理 4 を用いることで, 2 章に於いて紹介した Rasmussen-Tamagawa 予想を「semistable reduction をもつ」という仮定の下で証明することが出来る. 実際には, より強いことを示すことが出来るのでそのことを紹介したい. まず簡単に分かるように, K 上の g 次元アーベル多様体 A に対して, 2 章で述べた条件 (a) は次の 2 条件 (b), (c) が同時に満たされることと同値である：

(b) A は ℓ の外で good reduction をもつ.

(c) $A[\ell]$ は次のような G_K 作用で安定な filtration をもつ：

$$0 = \bar{V}_0 \subset \bar{V}_1 \subset \cdots \subset \bar{V}_{2g-1} \subset \bar{V}_{2g} = A[\ell].$$

ここで, $\dim_{\mathbb{F}_\ell} \bar{V}_i = i$, $\bar{V}_i/\bar{V}_{i-1}$ への G_K 作用は mod ℓ 円分指標で与えられる.

この条件 (b), (c) を若干緩めた以下の条件 (b)$'$, (c)$'$ を同時に満たすような K 上の g 次元アーベル多様体 A の同型類の集合を $\mathcal{A}(K, g, \ell_0, \ell)$ と書くことにする：

(b)$'$ A は ℓ_0 上のある有限素点で good reduction をもつ.

(c)$'$ $A[\ell]$ は次のような G_K 作用で安定な filtration をもつ：

$$0 = \bar{V}_0 \subset \bar{V}_1 \subset \cdots \subset \bar{V}_{2g-1} \subset \bar{V}_{2g} = A[\ell].$$

$\ell \neq \ell_0$ より, 定義から明らかに $\mathcal{A}(K, g, \ell) \subset \mathcal{A}(K, g, \ell_0, \ell)$ ではあるが, $\mathcal{A}(K, g, \ell_0, \ell)$ は有限集合になっているかどうかまでは分からない. しかし, 次の非存在性は証明できる：

系 6 ([O]). *K, g, ℓ_0 にのみ依る (具体的に計算可能な) 定数 $C_1 = C_1(K, g, \ell_0) > 0$ が存在して, $\ell > C_1$ かつ ℓ は K で分解しないならば $\mathcal{A}(K, g, \ell_0, \ell) \cap \{$semistable reduction をもつ $\}$ は空集合.*

さらに, 詳細は省略するが, 主定理を少々特別な場合に改良することで, Rasmussen-Tamagawa 予想の semistable 版を得る：

系 7 ([O]). *K, g にのみ依る (具体的に計算可能な) 定数 $C_2 = C_2(K, g) > 0$ が存在して, $\ell > C_2$ ならば $\mathcal{A}(K, g, \ell) \cap \{$semistable reduction をもつ $\}$ は空集合.*

この系 7 の証明はすでに Rasmussen-Tamagawa によりなされていたということは一言注意しておきたい[1]. 実はこの系 7 に限っていうならば, 実際には C_2 は $[K : \mathbb{Q}]$ と g に依るものとして見つけることが出来る.

特に系 6 の $g = 1$ の場合, つまり楕円曲線の場合は, よく知られた古典的な楕円曲線の mod ℓ 表現の既約性問題に対する結果を与えることになる.

[1] 少なくとも以前 Rasmussen 氏が九州大学に来て講演をされた際の話の内容からはそのように判断される.

系 8. E/K を全ての有限素点において semistable reduction をもつ楕円曲線とし, ℓ_E を素数 p で, p 上のある有限素点において E が good reduction をもつようなものの中で最小のものとする. このとき, $\ell \nmid d_K, \ell > 4\ell_E^{2dh_K^+}$ かつ ℓ は K で分解しないならば $E[\ell]$ は既約. ただし, d は $K/\mathbb{Q}$ の拡大次数, d_K は K の判別式, h_K^+ は K の狭義の類数である.

$K = \mathbb{Q}$ の場合は Serre ([Se], Section 5.4, Proposition 21, Corollary 1) によって上の「$\ell \nmid d_K, \ell > 4\ell_E^{2dh_K^+}$」を「$\ell > (1 + \ell_E^{1/2})^2$」に置き換えたものが示されている. ただしこの場合はもっと強く, 自然な連続準同型 $G_{\mathbb{Q}} \to GL(E[\ell])$ が全射になるということまで示されている.

4.2 ℓ 進 étale cohomology の剰余表現

K 上の楕円曲線 E の mod ℓ 表現 $E[\ell]$ が CM を持たないときに十分大きな ℓ に対して G_K の既約表現になっているということはよく知られているが (e.g. [Se]), これをもっと一般的に, K 上の滑らかな射影代数多様体 X の奇数次の ℓ 進エタールコホモロジー $H^w_{\text{ét}}(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ に拡張することができる. V が定義 3 の条件 (F) を満たすとき, V は剰余 Borel 型と呼ぶことにする.

系 9 ([O])**.** w を奇数とする. X を K 上の滑らかな射影代数多様体で全ての有限素点において semistable reduction をもつようなものとする. $b_w(X)$ を X の Betti 数, ℓ_X を素数 p で p 上のある有限素点において X が good reduction をもつようなものの中で最小のものとし, $H^w_{\text{ét}}(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ を X の w 次の ℓ 進エタールコホモロジーとする. このとき, $b_w(X)$ と ℓ_X に依るある定数 C が存在して, K で分解しないような $\ell > C$ に対して G_K の表現 $H^w_{\text{ét}}(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ は剰余 Borel 型ではない.

de Jong の alteration theorem [dJ] を用いることにより滑らかな射影代数多様体 X/K に対する $H^w_{\text{ét}}(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ は適当な有限次拡大 L/K に対する G_L の $\mathbb{Q}_\ell$ 表現として everywhere semistable 表現であることがわかる. このことを用いて上の仮定「全ての有限素点において semistable reduction をもつ」をもう少し緩和することができないかと考えているが, まだうまくいっていない.

参考文献

[Ca] Xavier Caruso, *Représentations semi-stables de torsion dans le case $er < p - 1$*, J. Reine Angew. Math. **594**, 35–92 (2006).

[dJ] Aise Johan de Jong, *Smoothness, semi-stability and alterations*, Publ. Math. IHES **83**, 51–93 (1996).

[FM] Jean-Mark Fontaine and Barry Mazur, *Geometric Galois Representations*, Elliptic curves, modular forms, and Fermat's last theorem (Hong Kong, 1993), Internat. Press, Cambridge, MA, 41–78 (1995).

[Fo] Jean-Mark Fontaine, *Il n'y a pas de variété abelienne sur $\mathbb{Z}$*, Invent. Math. no. 3, 515–538 (1985).

[O] Yoshiyasu Ozeki, *Non-existence of certain Galois representations with a uniform tame inertia weight*, preprint.

[RT] Christopher Rasmussen and Akio Tamagawa, *A finiteness conjecture on abelian varieties with constrained prime power torsion*, Math. Res. Lett. **15**, 1223–1231 (2008).

[Se] Jean-Pierre Serre, *Propriétés galoisiennes des points d'ordre fini des courbes elliptiques*, Invent. Math. **4**, 259–331 (1972).