EIGENCURVE について

山上 敦士 （京産大理）

0. Introduction

本稿では, Coleman と Mazur により 1998 年に出版された共著論文 “The eigencurve” [9] の内容を簡単に紹介させていただく. この Introduction では, Coleman と Mazur の eigencurve の研究に対する motivation について, おおまかに解説したい.

p を奇素数とし, 有理数体 $\mathbb{Q}$ の代数閉包 $\bar{\mathbb{Q}}$ をとり, $\bar{\mathbb{Q}}$ の p-進数体 $\mathbb{Q}_p$ の代数閉包 $\bar{\mathbb{Q}}_p$ への体としての埋め込み $\bar{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \bar{\mathbb{Q}}_p$ を一つ固定しておく. さらに, この固定された埋め込みのもとで, $\bar{\mathbb{Q}}_p$ の p-進完備化 $\mathbb{C}_p$ をとる. $\mathbb{C}_p$ 上には正規化された p-進付値 $\mathrm{ord}_p(\cdot)$ とそれに伴う p-進絶対値 $|\cdot|_p := p^{-\mathrm{ord}_p(\cdot)}$ が入る. ここで, 「正規化された」とは $\mathrm{ord}_p(p) = 1$ であることを意味する. 以下, $\mathbb{Z}$ と $\mathbb{Z}_p$ をそれぞれ有理整数環と p-進整数環とする.

k を 2 以上の整数, N を p と互いに素な正の整数とする. f を weight k, level Np の cuspidal な normalized Hecke eigenform とし, その Fourier 展開は $f(q) = \sum_{n\geq 1} a_n q^n$ で与えられるとする. ここで, 「normalized」とは $a_1 = 1$ であることを意味する. このとき, Fourier 係数 a_n たちは Hecke 作用素に対する f の固有値たちであり, とくに $\bar{\mathbb{Q}}$ の元なのであるが, ここでは, 固定された埋め込み $\bar{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \bar{\mathbb{Q}}_p$ により $\mathbb{C}_p$ の元とみなす.

Definition 0.1. p での Hecke 作用素 U_p に対する f の固有値 a_p の p-進付値 $\mathrm{ord}_p(a_p)$ のことを f の **slope** という.

Hida [13], [14] により, f の slope が 0 であるとき (このとき, f は **ordinary** であるという), f が k に p-進的に近い p-進 weight κ たちで parametrize された ordinary な Hecke eigenforms のなす p-進 analytic family $\{f_\kappa\}_\kappa$ の一員であることが証明された (この family を **Hida family** とよぶことにする). ここで, 「p-進 analytic family」とは, f_κ たちの Hecke 固有値が, p-進 analytic な冪級数を用いて p-進補間されていることを表しており, 「一員」であるとは, $\kappa = k$ のとき $f_\kappa = f$ であることを意味する (cf. ordinary な Hecke eigenforms の p-進 analytic family にまつわる Hida 理論については, 本報告集における落合理氏による稿「肥田理論の紹介」を参照のこと).

この「f が一員となっている p-進 analytic family $\{f_\kappa\}_\kappa$」を, 可換環論的に捉えたものが, Hida により構成された ordinary な p-進 Hecke 環 $\mathbb{T}^o_{p,N}$ である. $\mathbb{T}^o_{p,N}$ は射影群環 $\Lambda_N := \varprojlim_n \mathbb{Z}_p[(\mathbb{Z}/Np^n\mathbb{Z})^\times]$ 上 finite flat な多元環であり, f に対して, Λ_N 上の finite なある整拡大 I への環準同型

$$\varphi : \mathbb{T}^o_{p,N} \to I$$

と, family $\{f_\kappa\}_\kappa$ を parametrize している p-進 weight κ ごとに特殊化の環準同型

$$\mathrm{sp}_\kappa : I \to \mathbb{C}_p$$

で, 合成写像

$$\varphi_\kappa := \mathrm{sp}_\kappa \circ \varphi : \mathbb{T}^o_{p,N} \to \mathbb{C}_p$$

Date: 2009 年 8 月 21 日発表.

による Hecke 作用素 $T \in \mathbb{T}_{p,n}^{o}$ の像 $\varphi_\kappa(T) \in \mathbb{C}_p$ が Hecke eigenform f_κ の T に対する固有値と一致するものが存在する. $\kappa = k$ のときは, $\varphi_k(T)$ は f の T に対する固有値と等しい.

さらに, Λ_N-多元環の構造射 $\Lambda_N \to \mathbb{T}_{p,N}^{o}$ を rigid 幾何的に捉えることを考える. まず, そのために必要となる術語を準備する (cf. rigid 幾何の基本的な術語や事柄に関しては, [1] の Chapter 3 や Chapter 9 などを参照のこと).

Definition 0.2. 完備な Noether 半局所 $\mathbb{Z}_p$-多元環 R に対して, [12, Section 7] に「Berthelot による構成」として, rigid analytic space X_R で $\mathbb{C}_p$-valued points のなす集合が

$$X_R(\mathbb{C}_p) = \mathrm{Hom}_{\text{cont. } \mathbb{Z}_p\text{-alg}}(R, \mathbb{C}_p)$$

と同一視されるものの構成法が解説されている. この X_R を R **に付随する rigid analytic space** という. $A(X_R)$ を X_R 上の rigid analytic functions のなす環とし, $A^0(X_R)$ を spectral norm が 1 以下となる rigid analytic functions からなる $A(X_R)$ の部分環とすると, R の元を X_R 上の rigid analytic function とみなす自然な $\mathbb{Z}_p$-多元環の準同型

$$R \to A^0(X_R)$$

が存在する. R が $\mathbb{Z}_p$ 上 flat で normal な多元環であるときは, この準同型は同型であることが知られている (cf. [12, Proposition 7.3.6]).

Example 0.1. R が $\mathbb{Z}_p$-係数の 1 変数形式的冪級数環 $\mathbb{Z}_p[\![T]\!]$ であるとき, $\mathbb{Z}_p[\![T]\!]$ に付随する rigid analytic space $X_{\mathbb{Z}_p[\![T]\!]}$ は $\mathbb{Q}_p$ 上定義された 0 中心, 半径 1 の 1 次元 open unit disk $B(0,1)_{\mathbb{Q}_p}$ として得られる. このとき, $A^0(B(0,1)_{\mathbb{Q}_p}) = \mathbb{Z}_p[\![T]\!]$ と同一視され, $\mathbb{C}_p$-valued points のなす集合については,

$$\mathrm{Hom}_{\text{cont. } \mathbb{Z}_p\text{-alg}}(\mathbb{Z}_p[\![T]\!], \mathbb{C}_p) = B(0,1)_{\mathbb{Q}_p}(\mathbb{C}_p)(= \{x \in \mathbb{C}_p \mid |x|_p < 1\});$$
$$\phi \mapsto \phi(T)$$

と同一視される.

Example 0.2. $R = \Lambda_N$ のとき, Λ_N に付随する rigid analytic space X_{Λ_N} を (tame level N の) **weight space** とよび, $\mathcal{W}_N$ とかくことにする. $\mathbb{Z}_p^\times$ の自然な分解

$$\mathbb{Z}_p^\times \cong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times \times (1 + p\mathbb{Z}_p)$$

と $\mathbb{Z}_p$-多元環の同型

$$\mathbb{Z}_p[\![1 + p\mathbb{Z}_p]\!] \cong \mathbb{Z}_p[\![T]\!]; \quad 1 + p \mapsto 1 + T$$

を用いて, $\mathbb{Z}_p$-多元環の同型

$$\begin{aligned}\Lambda_N = \varprojlim_n \mathbb{Z}_p[(\mathbb{Z}/Np^n\mathbb{Z})^\times] &= \mathbb{Z}_p[\![(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \times \mathbb{Z}_p^\times]\!] \\ &\cong \mathbb{Z}_p[(\mathbb{Z}/Np\mathbb{Z})^\times] \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[\![1 + p\mathbb{Z}_p]\!] \\ &\cong \mathbb{Z}_p[(\mathbb{Z}/Np\mathbb{Z})^\times] \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[\![T]\!]\end{aligned}$$

が得られ, Example 0.1 により, この同型のもとで weight space $\mathcal{W}_N$ は open unit disk $B(0,1)_{\mathbb{Q}_p}$ の $\varphi(N)(p-1)$ 個の直積とみなすことができる. とくに, $\mathcal{W}_N$ は rigid analytic curve である. ここで, φ は Euler 関数を表す.

さて, Definition 0.2 の前で紹介した Hida による ordinary な p-進 Hecke 環 $\mathbb{T}_{p,N}^{o}$ に付随する rigid analytic space を $C_{p,N}^{o} := X_{\mathbb{T}_{p,N}^{o}}$ とおけば, Λ_N-多元環としての構造射 $\Lambda_N \to \mathbb{T}_{p,N}^{o}$ から誘導される rigid analytic spaces の間の射

$$\pi : C_{p,N}^{o} \to \mathcal{W}_N$$

が得られる．この π のことを, $C^o_{p,N}$ から weight space $\mathcal{W}_N$ への **weight projection** とよぶ. $\mathbb{T}^o_{p,N}$ は Λ_N 上 finite flat な多元環であることから, π は finite flat な射であり, とくに $\mathbb{T}^o_{p,N}$ は rigid analytic curve である．また, $\mathbb{C}_p$-valued points の集合について,

$$C^o_{p,N}(\mathbb{C}_p) = \mathrm{Hom}_{\text{cont. } \mathbb{Z}_p\text{-alg}}(\mathbb{T}^o_{p,N}, \mathbb{C}_p)$$

となるので, $C^o_{p,N}$ は Hida families を parametrize する rigid analytic curve とみなすことができる．

以上の Hida family に関する考察においては, slope が 0 である ordinary な Hecke eigenforms だけが parametrization の対象となっているが, Coleman [7], [8] により, 任意の非負有理数 α を固定したもとで, slope α を持つ Hecke eignforms からなる p-進 analytic family (これを **Coleman family** とよぶことにする) が構成されている (cf. Coleman の保型形式の p-進変形理論については, 本報告集における佐々木秀氏による稿「Coleman's theory of p-adic modular forms」を参照のこと)．そこで, 上述した rigid analytic curve $\pi : C^o_{p,N} \to \mathcal{W}_N$ が Hida families を parametrize したように,

「何か rigid analytic curve $\pi : C_{p,N} \to \mathcal{W}_N$ で, 任意の finite slopes を持つすべての Coleman families を一括して parametrize するようなものを構成できないか. さらに, $C_{p,N}$ が構成されたとして, weight projection π はどのような性質を持つか」

という問題を追究することが, eigencurve $C_{p,N}$ の構成に着手した際の Coleman と Mazur の motivation であった．そして, 彼らは [9] において, $p > 2$ で $N = 1$ の場合に $C_p := C_{p,1}$ を構成し, 本稿でも少しばかり紹介させていただくように, weight projection π の性質をある程度まで解析することができたのである ([9] の主結果については, Section 2 で簡単に紹介する)．しかし, まだまだ不明な点が多く, [9, Open questions in the introduction] で提出されている問題のほとんどすべてが解明されていないというのが現状である．最後に, それらの問題の一部を簡単に紹介しておく (Remarks 1.5, 1.6, 3.1 も参照のこと):

Questions.

(1) C_p は reduced か?
(2) C_p は smooth か?
(3) C_p の被約化 C_p^{red} の既約成分は有限個か?
(4) C_p^{red} の既約成分の genus は ∞ か?
(5) C_p^{red} の既約成分の weight space $\mathcal{W} := \mathcal{W}_1$ 上での次数は有限か?
(6) punctured disk で parametrize される有限な slope を持つ overconvergent Hecke eigenforms の p-進 analytic family で (overconvergent modular forms の定義については, Definition 3.1 を参照のこと), その puncture において ∞ slope を持つ overconvergent Hecke eigenform で cover されるものが存在するか?
Coleman-Mazur は, もし, このことが正しいならば, ∞ slope を持つ点を補うことで eigencurve を完備化することができるかもしれない, と述べている.
(cf. この問題については, Calegari [4] により, punctured disk の中心が整数点である場合に肯定的に解決されている.)
(7) C_p の $\mathcal{W}$ 上での ramification points は無限個か?
(8) arithmetic point $\kappa \in \mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$ with weight k を weight に持ち slope が $\alpha < k-1$ であるような classical な Hecke eigenform に対応する点 $c \in C_p(\mathbb{C}_p)$ に対し ($\mathcal{W}$ の arithmetic point の定義については, Lemma 1.3 を参照のこと), α に関するある 1 次多項式関数 $P(\alpha)$ の逆関数 $P^{-1}(\alpha)$ の値より大きな半径を持つ κ のまわりの affinoid subdomain $\mathcal{U} \subset \mathcal{W}$ で, $\mathcal{U}$ 上 finite étale な c の affinoid 近傍 $\mathcal{V} \subset C_p$ を伴うものが存在するか?

(cf. $\alpha < k-1$ かつ $\alpha \neq \frac{k-1}{2}$ のときは, Wan [21] の結果を用いることで, 問題で要請されている性質を持つ affinoid subdomain $\mathcal{U}$ として, α に関するある 2 次多項式関数 $Q(\alpha)$ の逆関数 $Q^{-1}(\alpha)$ の値より大きな半径を持つものがとれることはわかっている.)

(9) Stevens による $\Gamma_0(Np)$ 上の p-進 Hecke eigenforms に付随する p-進 L-関数の構成法を, eigencurve C_p 上で応用することで, classical な Hecke eigenforms に付随する L-関数を p-進 analytic に補間するような L-関数で, その Taylor 展開の係数として C_p 上の rigid analytic functions をもつものを構成できないか?
Coleman-Mazur は, もし, これが構成されれば, その zero locus は rigid analytic curve となり, その double zero のまわりでの C_p への projection の様子を研究することは非常に興味深いことである, と述べている.

(10) Liu-van der Put [17] の結果により, すべての連結で分離的な $\mathbb{Q}_p$ 上の 1 次元の rigid analytic space は, $\mathbb{Z}_p$ 上 flat なある formal scheme の generic fiber となることがわかっている. この意味で, 付随する rigid analytic space が eigencurve となるような $\mathbb{Z}_p$ 上の formal scheme は存在するか?
Coleman-Mazur は, もし, そのような formal scheme が存在するならば, それの closed fiber の既約成分を調べることは大変に興味深いことである, と述べている.

Remark 0.1. C_p の affinoid subdomain の実例計算の具体例として, Emerton [11] による $p = 2,\ N = 1$ の場合での "minimal slope part" を記述する研究や, Coleman-Stevens-Teitelbaum [10] による $p = 3$ の場合での "low slope part" に関する研究がある. これらの研究における実例計算では, weight space の boundary に近づけば, slope が 0 に近づくという現象がみられるが, そのような現象がみられないような p-adic eigencurve の既約成分が存在するかどうかは未だ確認されていないと思われる.

Remark 0.2. p-進 Hecke eigenforms を parametrize する rigid analytic spaces を構成する研究に関して, 最近の大きな進展として特筆すべきものに, Buzzard [3] による "eigenvarieties" の研究が挙げられる. これは, p-進 Hecke 環を座標環とする affinoid varieties を貼り合わせて eigencurve を構成した Coleman-Mazur [9] の仕事を, weight space の次元が 2 以上の場合にも活用できるように一般化したものであり, Buzzard は [3, Chapter III] において, この一般化を用いて, p-進 Hilbert Hecke eigenforms を parametrize する rigid analytic spaces, すなわち eigenvarieties の構成法を提示している. また, この他にも, Buzzard [3] の理論を活かして, 筆者 [23] により構成された p-進 Hilbert Hecke eigenforms を parametrize する (Buzzard のものとは少し形の異なる) eigenvariety や, Chenevier [5] により構成された $\mathrm{GL}_{n/\mathbb{Q}}$ 上の p-進 automorphic forms を parametrize する eigenvariety の研究がある. さらに, ごく最近では, Chenevier [6] により "type $U(3)$" の eigenvariety の研究も進められている (cf. Remark 2.4).

Acknowledgement. 第 17 回 (2009 年度) 整数論サマースクール「ℓ 進ガロア表現とガロア変形の整数論」におきまして, 講演の機会を与えていただいた世話人の落合理, 千田雅隆, 山内卓也の各氏に心より感謝申し上げます。

Contents

1. **Eigencurve の定義 – その 1**

この section では, Hecke eigenforms に付随する擬表現の変形空間における modular locus の rigid Zariski 閉包として eigencurve を定義することについて解説する. 以下, p を奇素数とし $N = 1$ とする (Buzzard [3, Part II] により, $p = 2$ であっても, また N が任意の正の整数であっても, egencurve が構成可能であることが証明されている).

1.1. **擬表現**

この subsection では, eigencurve の定義のために必要となる擬表現について簡単に解説する.

$\mathbb{Q}$ 上の $S := \{p, \infty\}$ の外不分岐な最大 Galois 拡大の Galois 群を $G_{\mathbb{Q},S}$ で表し, $c \in G_{\mathbb{Q},S}$ を複素共役とする. D を $2 \in D^\times$ であるような位相的可換環とし, D 上の連続な Galois 表現

$$\rho : G_{\mathbb{Q},S} \to \mathrm{GL}_2(D)$$

は $\rho(c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ を満たすとする. 任意の $g \in G_{\mathbb{Q},S}$ に対し, 行列 $\rho(g)$ の成分を

$$\rho(g) := \begin{pmatrix} a(g) & b(g) \\ c(g) & d(g) \end{pmatrix}$$

とおく.

Definition 1.1 (cf.[22, Lemma. 2.2.3]). 上記の設定のもとで, ρ **に付随する擬表現**とは, 以下で定義される D に値を持つ連続写像の三つ組 $r_\rho = (\alpha_\rho, \delta_\rho, \xi_\rho)$ のことである:

$$\begin{aligned}
&\alpha_\rho : G_{\mathbb{Q},S} \to D; \quad g \mapsto a(g),\\
&\delta_\rho : G_{\mathbb{Q},S} \to D; \quad g \mapsto d(g),\\
&\xi_\rho : G_{\mathbb{Q},S} \times G_{\mathbb{Q},S} \to D; \quad (g,h) \mapsto b(g)c(h).
\end{aligned}$$

これを記号として, $r_\rho : G_{\mathbb{Q},S} \to D$ とかくこともある. このとき, r_ρ は次の四つの性質を満たすことが直接計算によってわかる: $g,h,k,\ell \in G_{\mathbb{Q},S}$ に対して,

$$
\begin{array}{ll}
\text{(P1)} & \alpha_\rho(gh) = \alpha_\rho(g)\alpha_\rho(h) + \xi_\rho(g,h),\\
& \delta_\rho(gh) = \delta_\rho(g)\delta_\rho(h) + \xi_\rho(h,g),\\
\text{(P2)} & \xi_\rho(gh,k) = \alpha_\rho(g)\xi_\rho(h,k) + \delta_\rho(h)\xi_\rho(g,k),\\
& \xi_\rho(g,hk) = \alpha_\rho(k)\xi_\rho(g,h) + \delta_\rho(h)\xi_\rho(g,k),\\
\text{(P3)} & \xi_\rho(g,h)\xi_\rho(k,\ell) = \xi_\rho(g,\ell)\xi_\rho(k,h),\\
\text{(P4)} & \alpha_\rho(1) = \delta_\rho(1) = \alpha_\rho(c) = 1,\\
& \xi_\rho(g,h) = 0 \quad \text{if} \quad g \text{ or } h \in \{1,\ c\}
\end{array}
$$

一般の**擬表現** $r = (\alpha, \delta, \xi) : G_{\mathbb{Q},S} \to D$ は, 上の四つの性質 (P1)-(P4) を満たす三つの連続写像

$$\alpha : G_{\mathbb{Q},S} \to D, \quad \delta : G_{\mathbb{Q},S} \to D, \quad \xi : G_{\mathbb{Q},S} \times G_{\mathbb{Q},S} \to D$$

の組として定義される.

擬表現 $r = (\alpha, \delta, \xi) : G_{\mathbb{Q},S} \to D$ に対し, 二つの写像

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}(r) : G_{\mathbb{Q},S} \to D; \quad g \mapsto \alpha(g) + \delta(g),\\
&\det(r) : G_{\mathbb{Q},S} \to D; \quad g \mapsto \alpha(g)\delta(g) - \xi(g,g)
\end{aligned}
$$

をそれぞれ r の **trace** と **determinant** とよぶ.

直接計算により, 次の lemma を得る:

Lemma 1.1. *D に値をとる擬表現 $r = (\alpha, \delta, \xi) : G_{\mathbb{Q},S} \to D$ に対し,*

(1) $\det(r)$ は $D^\times$ に値をとる群の連続準同型である.

(2) 任意の $g, h \in G_{\mathbb{Q},S}$ に対し, 次の三つの等式が成立する:

$$
\begin{aligned}
\alpha(g) &= \frac{1}{2}(\mathrm{Tr}(r)(g) + \mathrm{Tr}(r)(cg)),\\
\delta(g) &= \frac{1}{2}(\mathrm{Tr}(r)(g) - \mathrm{Tr}(r)(cg)),\\
\xi(g,h) &= \alpha(gh) - \alpha(g)\alpha(h) = \delta(hg) - \delta(h)\delta(g).
\end{aligned}
$$

したがって, 擬表現 r の値は $\mathrm{Tr}(r)$ の値で定まる.

(3) 連続な Galois 表現 $\rho : G_{\mathbb{Q},S} \to \mathrm{GL}_2(D)$ に付随する擬表現 r_ρ について, 次の等式が成立する:

$$\mathrm{Tr}(r) = \mathrm{Tr}(\rho), \quad \det(r) = \det(\rho).$$

したがって, もし二つの連続な表現 ρ と ρ' が同値であるならば, (2) により $r_\rho = r_{\rho'}$ となる.

Remark 1.1. 擬表現の面白みの一つである重要な事実として, [22, Lemma 2.2.3] で論じられているように, ある条件を満たす擬表現 r に対して, $r = r_\rho$ となるような連続 Galois 表現 $\rho : G_{\mathbb{Q},S} \to \mathrm{GL}_2(D)$ を構成できることが挙げられる. このことは, 本稿ではとくに必要ないなので, 以下, 命題の主張を述べておくだけにして, 詳しい解説は省略させていただく.

Proposition 1.2 (cf. [22, Lemma 2.2.3] ([15, Proposition 2.16] も参照のこと))**.** *以上の設定のもと, $r = \{\alpha, \delta, \xi\} : G_{\mathbb{Q},S} \to D$ を D に値をとる擬表現として, 次の二つの条件のうち, どちらか一方は満たされていると仮定する:*

(i) 任意の $g, h \in G_{\mathbb{Q},S}$ に対して $\xi(g,h) = 0$ である;

(ii) ある $g,h\in G_{\mathbb{Q},S}$ が存在して $\xi(g,h)\in D^\times$ となる.
このとき, ある D-係数の連続な 2 次元表現

$$\rho: G_{\mathbb{Q},S}\to \mathrm{GL}_2(D)$$

で, 次を満たすものが存在する:

$$\mathrm{Tr}(\rho)=\mathrm{Tr}(r),\ \det(\rho)=\det(r),\ \rho(c)=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}.$$

とくに, Lemma 1.1 (2) により, $r=r_\rho$ となることがわかる.

1.2. **普遍変形環** R_p

この subsection では, eigencurve を定義するために必要な完備な Noether 半局所 $\mathbb{Z}_p$-多元環 R_p を導入し, そのいくつかの性質について解説する.

[9, Proposition 5.1.1] により, tame level 1, つまり level が p-冪である Hecke eigenforms に付随する mod p Galois 表現の同値類全体のなす集合は有限集合であり, Lemma 1.1 (3) により, その同値類に付随する mod p 擬表現たちもまた有限個しかないことがわかる (Hecke eigenform に付随する Galois 表現については, 本報告集における吉田輝義氏による稿「モジュラー形式に付随したガロア表現」を参照のこと). それらを $\bar{r}_1,\dots,\bar{r}_k$ として, 各 mod p 擬表現 $\bar{r}_i$ に対して, 完備な Noether 局所環のなす圏上での擬表現の変形問題を, Galois 表現の変形問題と同じように考えることができる (cf. Galois 表現の変形理論については, 本報告集における今井直毅氏による稿「ガロア表現の変形理論入門」を参照のこと).

このとき, [9, Theorem 5.1.3] により, ある完備な Noether 局所環 $R^{(i)}$ とそれに値を持つ擬表現 $r_i^{\mathrm{univ}}: G_{\mathbb{Q},S}\to R^{(i)}$ で次の性質を持つものが存在する: 任意の完備な Noether 局所環 A とそれに値を持つ擬表現 $r: G_{\mathbb{Q},S}\to A$ で A の極大 ideal $\mathfrak{m}_A$ による reduction $r(\mathrm{mod}\ \mathfrak{m}_A)$ が $\bar{r}_i$ と一致するものに対し, 局所環の準同型 $\varphi: R^{(i)}\to A$ で

$$\varphi\circ r_i^{\mathrm{univ}}=r$$

となるものが唯一つ存在する. この意味で, $R^{(i)}$ と r_i^{univ} をそれぞれ $\bar{r}_i$ **に対する普遍変形環**と**それに付随する普遍擬表現**とよぶ. ここで「$\varphi\circ r_i^{\mathrm{univ}}$」は, 擬表現 r_i^{univ} をなす三つの写像のそれぞれに対して φ を施すことで得られる A に値を持つ擬表現を表す.

Definition 1.2. (1) 上記の状況のもとで, 普遍変形環 $R^{(1)},\dots,R^{(k)}$ とそれらに付随する擬表現たちの直積をそれぞれ

$$R_p:=\prod_{i=1}^k R^{(i)},\quad r^{\mathrm{univ}}:=\prod_{i=1}^k r_i^{\mathrm{univ}}: G_{\mathbb{Q},S}\to R_p$$

とおく. 定義により, R_p は完備な Noether 半局所 $\mathbb{Z}_p$-多元環であり, Definition 0.2 にあるように, R_p に付随する $\mathbb{Q}_p$ 上の rigid analytic space X_{R_p} を X_p とおく. このとき, 各 $1\le i\le k$ に対し, X_i を $R^{(i)}$ に付随する rigid analytic space とすれば,

$$X_p=\coprod_{i=1}^k X_i$$

である. また, $\mathbb{C}_p$-valued points のなす集合については,

$$X_p(\mathbb{C}_p)=\mathrm{Hom}_{\mathrm{cont.}\ \mathbb{Z}_p\text{-alg}}(R_p,\mathbb{C}_p)$$

である. 普遍変形環に付随する rigid analytic spaces である X_p や X_i たちを**普遍変形空間**という.

(2) f を level p-冪の任意の normalized Hecke eigenform とし, その weight を $k \geq 2$, character を ε とする. f に付随する Galois 表現

$$\rho_f : G_{\mathbb{Q},S} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}_p)$$

は odd な表現, つまり, 複素共役 $c \in G_{\mathbb{Q},S}$ に対して $\det(\rho_f) = -1$ であることに注意して, Definition 1.1 にあるように ρ_f から擬表現 r_{ρ_f} が得られる. これを mod p して得られる mod p 擬表現 $\bar{r}_{\rho_f}$ は $\bar{r}_1, \ldots, \bar{r}_k$ のうちのどれかと一致するので, 普遍変形環 R_p とそれに付随する普遍擬表現 r^{univ} の定義により, ある $\mathbb{C}_p$-valued point $x_f \in X_p(\mathbb{C}_p) = \mathrm{Hom}_{\text{cont. } \mathbb{Z}_p\text{-alg}}(R_p, \mathbb{C}_p)$ で,

$$x_f \circ r^{\mathrm{univ}} = r_{\rho_f}$$

となるものが唯一つ存在する. これを f から得られる **modular point** とよぶ. このとき, p と異なる任意の素数 ℓ での Frobenius 元 $\mathrm{Frob}_\ell \in G_{\mathbb{Q},S}$ に対し, 等式

$$\mathrm{Tr}(r_{\rho_f})(\mathrm{Frob}_\ell) = \mathrm{Tr}(\rho_f(\mathrm{Frob}_\ell)) = a_\ell(f)$$
$$\det(r_{\rho_f})(\mathrm{Frob}_\ell) = \det(\rho_f(\mathrm{Frob}_\ell)) = \varepsilon(\ell)\ell^{k-1}$$

が成立することに注意. ここで, $a_\ell(f)$ は f の ℓ 番目の Fourier 係数, つまり ℓ での Hecke 作用素 T_ℓ に対する f の固有値を表す.

(3) いま $N = 1$ としていることに注意して, Introduction で導入した射影群環 $\Lambda_1 = \varprojlim_n \mathbb{Z}_p[(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times] = \mathbb{Z}_p[\![\mathbb{Z}_p^\times]\!]$ を単に Λ とかき, R_p に Λ-多元環の構造を次のように入れる: 類体論により, $G_{\mathbb{Q},S}$ の Abel 化 $G_{\mathbb{Q},S}^{\mathrm{ab}}$ は円分指標を用いて

$$G_{\mathbb{Q},S}^{\mathrm{ab}} \cong \mathbb{Z}_p^\times$$

と同一視され, これと逆向きの同型と

$$\det(r^{\mathrm{univ}}) : G_{\mathbb{Q},S}^{\mathrm{ab}} \to R_p^\times$$

を合成することで得られる群準同型 $\mathbb{Z}_p^\times \to R_p^\times$ を射影群環 $\Lambda = \mathbb{Z}_p[\![\mathbb{Z}_p^\times]\!]$ 上に自然に拡張した $\mathbb{Z}_p$-多元環の準同型を

$$\mu_{\det} : \Lambda \to R_p$$

とおく (cf. 類体論については, 本報告集における佐藤周友氏による稿「ガロアコホモロジー」を参照のこと). さらに, 任意の $\gamma \in \mathbb{Z}_p^\times$ の Λ における像を $[\gamma]$ とかいて,

$$\mu_{\mathrm{wt}}([\gamma]) := \gamma \cdot \mu_{\det}([\gamma]) \in R_p$$

とおくことで, $\mathbb{Z}_p$-多元環の準同型

$$\mu_{\mathrm{wt}} : \Lambda \to R_p$$

が定義される. 上述の μ_{wt} の定義の右辺にある $\cdot$ は, R_p の $\mathbb{Z}_p$-多元環としての構造からくる自然な積を表す.

以下, μ_{wt} により R_p を Λ-多元環としてみなす. このとき, Λ-多元環としての構造射 μ_{wt} から, $\mathbb{Q}_p$ 上定義された rigid analytic space の射

$$\pi : X_p \to \mathcal{W}(:= \mathcal{W}_1)$$

が誘導される. これを X_p の $\mathcal{W}$ への **weight projection** とよぶ.

Lemma 1.3. f を level p-冪の任意の normalized Hecke eigenform とし, その weight を $k \geq 2$, character を ε とする. このとき, f から得られる modular point $x_f \in X_p(\mathbb{C}_p)$ について, $\pi(x_f) \in \mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$ は $\mathbb{Z}_p^\times$ 上の character として $\varepsilon\tau^k\eta_k$ と一致する (この形の $\mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$ の点を **arithmetic point of weight k, nebentypes character ε** とよぶ).

ここで, ε は f の level を p^ν として自然な全射 $\mathbb{Z}_p^\times \to (\mathbb{Z}/p^\nu\mathbb{Z})^\times$ を通して $\mathbb{Z}_p^\times$ 上の character とみなしており, τ と η_k はそれぞれ

$$\tau : \mathbb{Z}_p^\times \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times \times (1+p\mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\text{proj.}} (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times \hookrightarrow \mathbb{Z}_p^\times \hookrightarrow \mathbb{C}_p^\times,$$

$$\eta_k : \mathbb{Z}_p^\times \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times \times (1+p\mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\text{proj.}} 1+p\mathbb{Z}_p \hookrightarrow \mathbb{Z}_p^\times \hookrightarrow \mathbb{C}_p^\times; a \mapsto (\tau(a), \langle\langle a\rangle\rangle) \mapsto \langle\langle a\rangle\rangle^k$$

と定義される character である.

Proof. 類体論による同型 $G_{\mathbb{Q},S}^{\mathrm{ab}} \cong \mathbb{Z}_p^\times$ のもとで, p と異なる素数 ℓ に対し, Frobenius 元 Frob_ℓ は $\ell \in \mathbb{Z}_p^\times$ に写され, Chebotarev の密度定理により $\{\mathrm{Frob}_\ell \mid \ell \neq p\}$ は $G_{\mathbb{Q},S}$ において稠密な部分集合であるので (cf. Chebotarev の密度定理については, 本報告集における千田雅隆氏による稿「ガロア表現の基礎 II」を参照のこと),

$$\pi(x_f) = x_f \circ \mu_{\mathrm{wt}} : \mathbb{Z}_p[\![\mathbb{Z}_p^\times]\!] \to \mathbb{C}_p$$

の $\mathbb{Z}_p^\times$ 上での様子を知るためには, $\ell \in \mathbb{Z}_p^\times$ の $\mathbb{Z}_p[\![\mathbb{Z}_p^\times]\!]$ における像 $[\ell]$ に対する $\pi(x_f)$ の値を計算すればよい. 実際には, μ_{wt} と μ_{det} の定義を用いて次の等式が得られるので, lemma の主張が成立することがわかる:

$$\begin{aligned}
\pi(x_f)([\ell]) &= x_f(\mu_{\mathrm{wt}}([\ell])) = x_f(\ell \cdot \mu_{\mathrm{det}}([\ell])) \\
&= \ell x_f(\det(r^{\mathrm{univ}})(\mathrm{Frob}_\ell)) = \ell \det(r_{\rho_f})(\mathrm{Frob}_\ell) = \ell \det(\rho_f(\mathrm{Frob}_\ell)) \\
&= \ell\varepsilon(\ell)\ell^{k-1} = \varepsilon(\ell)\ell^k = \varepsilon(\ell)\tau(\ell)^k\eta_k(\ell).
\end{aligned}$$

□

Remark 1.2. Definition 1.2 (3) で, μ_{det} ではなく μ_{wt} により R_p に Λ-多元環としての構造を入れたおかげで, Lemma 1.3 において, f の weight と character の情報がそのまま $\pi(x_f)$ の形に反映されていることに注意.

1.3. $X_p \times_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{A}^1_{\mathbb{Q}_p}$ 内の modular locus を用いた定義

この subsection では, eigencurve C_p を $X_p \times_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{A}^1_{\mathbb{Q}_p}$ 内での "refined modular points" たちのなす "modular locus" とよばれるものの rigid Zariski 閉包として定義する. そのために, まず "rigid analytic affine line" $\mathbb{A}^1_{\mathbb{Q}_p}$ について簡単に解説しておく:

Definition 1.3. 任意の正の整数 m に対し, $B[0,p^m]_{\mathbb{Q}_p}$ を $\mathbb{Q}_p$ 上定義された中心 0, 半径 p^m の closed unit disk とする. これは, $\mathbb{Z}_p$-係数の収束冪級数環

$$\mathbb{Z}_p\langle p^m T\rangle := \{\sum_{n\geq 0} a_n(p^mT)^n \mid |a_n|_p \to 0 \ (n \to \infty)\}$$

の極大 ideals のなす affinoid variety

$$B[0,p^m]_{\mathbb{Q}_p} = \mathrm{Max}(\mathbb{Z}_p\langle p^mT\rangle)$$

として与えられるもので, $\mathbb{C}_p$-valued points のなす集合は

$$B[0,p^m]_{\mathbb{Q}_p}(\mathbb{C}_p) = \{x \in \mathbb{C}_p \mid |x|_p \leq p^m\}$$

である. closed unit disks の和集合を

$$\mathbb{A}^1_{\mathbb{Q}_p} := \cup_{m\geq 1} B[0,p^m]_{\mathbb{Q}_p}$$

とおいて, **rigid analytic affine line** とよぶ. $\mathbb{A}^1_{\mathbb{Q}_p}$ 上の rigid analytic functions のなす環は

$$\begin{aligned} A(\mathbb{A}^1_{\mathbb{Q}_p}) &= \bigcap_{m\geq 1} \mathbb{Z}_p\langle p^m T\rangle \\ &= \{\sum_{n\geq 0} a_n T^n \mid a_n \in (p^{c_n}) \text{ for any } \{c_n\}_{n\geq 0} \subset \mathbb{Z} \text{ such that } \frac{c_n}{n} \to \infty\ (n \to \infty)\} \\ &=: \mathbb{Z}_p\{\{T\}\} \end{aligned}$$

で与えられ, その元を $\mathbb{Z}_p$ 上の **entire series** とよぶ. とくに, 定数項が 1 である entire series のことを **Fredholm series** とよぶ.

さて, 以上の準備のもと eigencurve C_p を次のように定義する:

Definition 1.4. (1) level が p-冪の任意の normalized Hecke eigenform f について, f の slope が有限であるとき, つまり f の U_p-固有値 u_f が 0 でないとき,

$$\tilde{x}_f := (x_f, \frac{1}{u_f}) \in (X_p \times_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{A}^1_{\mathbb{Q}_p})(\mathbb{C}_p)$$

を f **に付随する refined modular point** とよぶ.

(2) refined modular points のなす集合

$$\begin{aligned} \mathcal{M} := \{\tilde{x}_f \in (X_p \times_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{A}^1_{\mathbb{Q}_p})(\mathbb{C}_p) \mid \\ f : \text{normalized Hecke eigenform of } p\text{-power level with finite slope}\} \end{aligned}$$

を $X_p \times_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{A}^1_{\mathbb{Q}_p}$ 内の **classical modular locus** とよぶ.

(3) classical modular locus $\mathcal{M}$ の $X_p \times_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{A}^1_{\mathbb{Q}_p}$ 内での rigid Zariski 閉包を C_p とおく. 一般には C_p のことを p**-adic eigencurve of tame level** 1 とよぶが, 本稿では単に **eigencurve** とよぶことにする. rigid analytic space の合成射

$$C_p \hookrightarrow X_p \times_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{A}^1_{\mathbb{Q}_p} \xrightarrow{\text{proj.}} X_p \xrightarrow{\pi} \mathcal{W}$$

を改めて $\pi : C_p \to \mathcal{W}$ とおき, eigencurve C_p の **weight projection** とよぶ.

Remark 1.3. Definition 1.4 (3) の定義からは, eigencurve C_p が本当に rigid analytic curve であるかどうか, すぐにはわからない. Section 3 において, C_p が rigid analytic curve であることを証明するために用いられる C_p のもう一つの定義を解説する (Definition 3.3). C_p の二つの定義 Definition 1.4 (3) と Definition 3.3 の整合性については, Theorem 3.3(=[9, Theorem F]) で概説する.

eigencurve C_p とその weight projection $\pi : C_p \to \mathcal{W}$ の性質を深く研究することが Coleman-Mazur [9] の主目的となるが, rigid analytic space の理論を様々に適用するうえで, C_p そのものよりも扱いやすいということで, [9] の多くの部分では C_p を被約化した **reduced eigencurve** C_p^{red} の性質を研究している.

Remark 1.4. Introduction の Questions (1) にあるように, [9, Open questions in the introduction] において, eigencurve C_p 自身 reduced だろうか, という問いかけがされている. この問題は未だ解決されていないと思われる.

Remark 1.5. C_p^{red} 上の rigid analytic functions のなす環を $\mathcal{O}_{C_p^{\mathrm{red}}}$ とかく. 自然な projection $C_p^{\mathrm{red}} \to X_p$ を通して, X_p 上の普遍擬表現を C_p^{red} 上に引き戻すことで, $\mathcal{O}_{C_p^{\mathrm{red}}}$ に値をとる rigid analytic な擬表現が得られ, ある discrete set Δ を除外したう

えで (この discrete set は Theorem 2.1 で得られる generically な同型において除外されるもの), rigid analytic な Galois 表現

$$\boldsymbol{\rho} : G_{\mathbb{Q},S} \to \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{C_p^{\mathrm{red}} \setminus \Delta})$$

で, 各 $c \in C_p^{\mathrm{red}} \setminus \Delta$ で特殊化すれば, c に対応する overconvergent Hecke eigenform f_c (次節の Theorem 2.5 で得られるもの) に付随する Galois 表現と同値になるものが構成される. この rigid analytic な Galois 表現 $\boldsymbol{\rho}$ について, [9, Open questions in the introduction] では, 次のような問題が提起されているが, 未解決のままであると思われる:

(1) $\boldsymbol{\rho}$ は rigid analytic functions を制限する自然な射 $\mathcal{O}_{C_p^{\mathrm{red}}} \to \mathcal{O}_{C_p^{\mathrm{red}} \setminus \Delta}$ を通して, $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{C_p^{\mathrm{red}}})$ への表現に延長可能か?

(2) (1) のように $\boldsymbol{\rho}$ が $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{C_p^{\mathrm{red}}})$ 上に延長されたとして, この $\boldsymbol{\rho}$ は次のように modular curves の cohomology を用いて構成されるものか?: $\mathcal{H}$ を不定元 T_ℓ ($\ell \neq p$: 素数) と U_p で Λ 上生成される無限変数多項式環とし, 自然な準同型 $\mathcal{H} \to \mathcal{O}_{C_p}$ により, $\mathcal{O}_{C_p}$ を $\mathcal{H}$-多元環とみなす. 各 $n \geq 1$ に対し, modular curves の適切な projection $X_1(p^{n+1}) \to X_1(p^n)$ をとり,

$$M := \varinjlim_n H^1(X_1(p^n), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$$

とおけば, M への $G_{\mathbb{Q},S}$ と $\mathcal{H}$ の作用が可換となり, M を $\mathcal{H}[\![G_{\mathbb{Q},S}]\!]$-加群とみなすことができる. M の Pontryagin dual を

$$M^* := \mathrm{Hom}(M, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$$

とおけば, M^* は compact な $\mathcal{H}[\![G_{\mathbb{Q},S}]\!]$-加群である.

$$V := M^* \hat{\otimes}_{\mathcal{H}} \mathcal{O}_{C_p}$$

を C_p 上の準連接層とみなせば, M^* 上の $G_{\mathbb{Q},S}$-作用により, V 上の C_p-linear な $G_{\mathbb{Q},S}$-作用が得られる. このとき, C_p 上, もしくは C_p のある一部分上で, V は $\boldsymbol{\rho}$ と同値な $G_{\mathbb{Q},S}$-作用を持つ rank 2 の locally free な準連接層となるか?

(3) (2) で述べた M^* から, overconvergent Hecke eigenforms に付随する Galois 表現を切り出す operation は定義できないだろうか?

(4) また, (2) で述べた M^* や V の構成法とそれらに対する問いかけを, higher weight の parabolic cohomology を用いた all weights を扱う理論に対して考えれば, どのような理論が展開されるだろうか?

(5) 一方で, eigencurve C_p やそこから派生する Galois 表現 $\boldsymbol{\rho}$ の性質を研究するにあたり, Galois 表現の変形理論からの a priori な approach はないものか? Coleman-Mazur は, もし, そのような approach があるならば, eigencurve の局所的な性質を解析するうえで非常に役立つであろう, と述べている.

Remark 1.6. [9, Open questions in the introduction] では, local な Galois 表現の中で crystalline なものに着目して eigencurve の local version を考えることについて, 次のような問題提起がなされている:

X を固定された $G_{\mathbb{Q}_p} := \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ の絶対既約な 2 次元の mod p 表現に対する $\mathbb{Q}_p$ 上の rigid analytic な変形空間とする. X は 5 次元の rigid anlytic space であり, 6 次元の rigid analytic space $X \times_{\mathbb{Q}_p} (\mathbb{A}^1_{\mathbb{Q}_p} \setminus \{0\})$ の点 (x, u) について, $x \in X$ は crystalline な表現に対応し, かつ $c \in \mathbb{A}^1_{\mathbb{Q}_p} \setminus \{0\}$ が x に付随する Fontaine-Dieudonné module の Frobenius に対する固有値の一つであるとき, (x, u) は **crystalline** であるということにする. このとき, $X \times_{\mathbb{Q}_p} (\mathbb{A}^1_{\mathbb{Q}_p} \setminus \{0\})$ 内で crystalline な点全体のなす部分集合の rigid Zariski 閉包をとれば, どのような rigid analytic subspace となるだろ

うか? Coleman-Mazur は, その次元は 3 次元になるだろうと述べており, ある affine 3-space の rigid analytic subspace となるだろうか, と問いかけている. (cf. Kisin [16] により, $G_{\mathbb{Q}_p}$ の 2 次元表現の変形空間における crystalline な点たちの Zariski density についての研究されており, 最近では, Kisin の結果を, 一般の局所体 K 上の $n \geq 2$ 次元表現の変形空間に対する結果に一般化する取り組みが, Nakamura や Chenevier などにより進められている.)

2. 主結果

この section では, eigencurve C_p とその被約化 C_p^{red} について, [9] で証明されている様々な定理のうち, 代表的なものをいくつか紹介する. これらの定理の証明については, 次節以降で部分的に触れることはあるが, ほとんどすべて省略させていただくので, 詳細については原論文 [9] の該当箇所をご参照いただきたい.

はじめの二つは, C_p^{red} の既約成分の性質に関するものである:

Theorem 2.1 ([9, Theorem A])**.** reduced eigencurve C_p^{red} の任意の既約成分 C に対し, ある $\gamma \in R_p^{\times}$ が存在して, rigid analytic functions のなす環の準同型

$$\Lambda\{\{T\}\} \to R_p\{\{T\}\}; \quad \sum_{n\geq 0} a_n T^n \mapsto \sum_{n \geq 0} \mu_{\mathrm{wt}}(a_n)(\gamma T)^n$$

から誘導される rigid analytic spaces の射

$$X_p \times_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{A}^1_{\mathbb{Q}_p} \to \mathcal{W} \times_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{A}^1_{\mathbb{Q}_p}$$

のもとで, C は $\mathcal{W} \times_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{A}^1_{\mathbb{Q}_p}$ 内のある **Fredholm hypersurface** (ある Fredholm series の zero locus として定義される $\mathcal{W} \times_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{A}^1_{\mathbb{Q}_p}$ 内の subspace のこと) と **generically に同型** (すなわち, ある discrete set を除いて同型) となる.

Remark 2.1. C_p^{red} の既約成分 C が $\mathcal{W} \times_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{A}^1_{\mathbb{Q}_p}$ の Fredholm hypersurface と generically に同型であることがわかったことで, C_p^{red} の weight projection を研究する手がかりをいくらかは掴めた印象はあるが, 一般には, C が $\mathcal{W}$ 上 finite であるかどうかさえ未だに解明されていない状況である.

Theorem 2.2 ([9, Theorem B])**.** C_p^{red} の任意の既約成分 C は $\mathcal{W}$ 上 **component-wise almost surjective** (つまり, $\pi(C)$ を含む $\mathcal{W}$ の既約成分の中で $\pi(C)$ の補集合は有限集合) である.

Remark 2.2. もし, 既約成分 C が slope 0 の Hida family を含んでいれば, C は weight projection π により $\mathcal{W}$ のある既約成分に全射で写される.

次の定理は, C_p^{red} 自身の weight space $\mathcal{W}$ 上での性質に関するものである:

Theorem 2.3 ([9, Theorem C])**.** C_p^{red} は $\mathcal{W}$ 上 **locally in-the-domain finite flat** (つまり, C_p^{red} のある affinoid covering $\{\mathcal{U}_i\}_i$ が存在して, 任意の $\mathcal{U}_i$ に weight projection π を制限すれば $\pi|_{\mathcal{U}_i} : \mathcal{U}_i \to \pi(\mathcal{U}_i)$ が finite flat) である.

Remark 2.3. Theorem 2.3 の主張にある affinoid open subspaces $\mathcal{U}_i$ たちと同じように, positive slope を持つ Coleman families からなる既約成分 C で $\pi|_C : C \to \pi(C)$ が finite flat となるようなものが存在するならば, それは rigid 幾何的な意味での Hida family の一般化が入手できたことになる (cf. Introduction).

次の定理は, Hecke eigenforms の合同関係と C_p^{red} の既約成分との関係に関するものであり, 普遍変形環 R_p の構成法とその性質からただちにわかることである:

Theorem 2.4 ([9, Theorem D]). $\tilde{x}_f, \tilde{x}_g \in \mathcal{M} \subset C_p(\mathbb{C}_p)$ をそれぞれ level p-冪の normalized Hecke eigenforms f と g に付随する refined modular points とする．もし x_f と x_g が C_p^{red} の中で同じ既約成分に属するならば, Fourier 係数ごとに合同であるという意味の合同式

$$f \equiv g \pmod{\mathfrak{m}_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}}}$$

を得る．ここで, $\mathfrak{m}_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}}$ は $\mathbb{C}_p$ の整数環 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ の極大 ideal を表す.

次の定理は, eigencurve C_p が有限な slopes を持つ normalized overconvergent Hecke eigenforms を parametrize していることを保証するものである．この定理の証明については, Section 3.2 において Theorem 3.4 として概説する． また, overconvergent modular forms の定義については, Definition 3.1 で簡単に概説はするが, 詳細は [9, Sections 2.1, 2.2] をご参照いただきたい:

Theorem 2.5 ([9, Theorem E=Theorem 6.2.1]). 集合の全単射

$$\begin{aligned} C_p(\mathbb{C}_p) \xrightarrow{\sim} \{&\text{normalized overconvergent Hecke eigenforms} \\ &\qquad\qquad\qquad\text{of } p\text{-power level with finite slope}\}; \\ c = (x_c, \frac{1}{u_c}) \ \mapsto \ & f_c \end{aligned}$$

で, $x_c \in X_p(\mathbb{C}_p)$ は $x_c \circ r^{\mathrm{univ}} = r_{\rho_{f_c}}$ を満たし, $u_c \in \mathbb{C}_p^{\times}$ は f_c の U_p-固有値と一致するようなものが存在する．ここで, ρ_{f_c} は Gouvêa-Hida の定理 (cf. [9, Theorem 5.2.1]) により f_c に付随する Galois 表現を表す.

Remark 2.4. この定理は, $X_p \times_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{A}^1_{\mathbb{Q}_p}$ 内で, refined modular points の rigid Zariski 閉包 C_p をとれば, その $\mathbb{C}_p$-valued points として有限な slopes を持つ normalized overconvergent Hecke eigenforms が生じることを示している．さらに, Section 4 で概説するように, C_p は rigid analytic curve, つまり 1 次元の幾何的対象として得られることがわかっている.

その一方で, Definition 1.2 (1) で考察した level p-冪の normalized Hecke eigenforms に付随する mod p 擬表現たち $\bar{r}_1, \ldots, \bar{r}_k$ に沿った分解 $X_p = \sqcup_{i=1}^k X_i$ において, とくに $\bar{r}_i$ が既約な mod p Galois 表現に付随しているような添字 i に着目したとき, Mazur [18] の “infinite fern” の研究によると, X_i 内で modular points の rigid Zariski 閉包をとれば, Sen [19], [20] による “generalized Hodge-Tate weights” (“Hodge-Tate-Sen weights” ともいう) の積をとった値の zero locus として定義される “Sen null subspace” と呼ばれる X_i の subspace X_i^{null} の中で, (1 次元ではなくて) 2 次元の拡がりを見せることが知られており, $X_i \times_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{A}^1_{\mathbb{Q}_p}$ 内の eigencurve $C_p \cap (X_i \times_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{A}^1_{\mathbb{Q}_p})$ から X_i 内の X_i^{null} への projection はおよそ $2:1$ の射となることがわかっている (cf. Sen による generalized Hodge-Tate weights については, 本報告集における中村健太郎氏による稿「p-進表現入門」を参照のこと).

ちなみに, Chenevier [6] は, “type $U(3)$” の modular な剰余 Galois 表現 $\bar{\rho}$ に対する普遍変形空間 $\mathfrak{X}(\bar{\rho})$ 内で, ある条件下で modular points たちが rigid Zariski 位相的に稠密であること ([6, Theorem 1.11]) を, $\bar{\rho}$ に付随する “type $U(3)$ の eigenvariety” $\mathcal{E}(\bar{\rho}) \subset \mathfrak{X}(\bar{\rho}) \times_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{A}_{\mathbb{Q}_p} \times_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{A}_{\mathbb{Q}_p} \times_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{A}_{\mathbb{Q}_p}$ を $\mathfrak{X}(\bar{\rho})$ に射影したものが “type $U(3)$ の infinite fern” ([6, Section 2]) を含むということを通して, $\mathcal{E}(\bar{\rho})$ の rigid analytic 幾何的な性質 ([6, Theorem 4.8 と Theorem 4.10]) を用いて証明している．この研究成果は, eigenvariety の幾何的性質を普遍変形空間の構造を調べる手だてとして活用できることを具体的に示したものとして注目に値する.

Remark 2.5. 上述した定理の他にも, 例えば "Katz の p-進 modular Hecke eigenfunction" f について, f の Fourier 展開が level p-冪の Hecke eigenforms の Fourier 展開の極限として得られることと, f が overconvergent Hecke eigenform であることが同値な条件であることを示した [9, Theorem G] など, [9] では eigencurve C_p を用いて p-進 modular forms にまつわる定理もいくつか証明されているが, 本稿では割愛させていただく (cf. Katz の p-進 modular functions の定義については, [9, Section 2.3] を参照のこと).

3. Eigencurve の定義 – その 2

この section では, eigencurve がその名の通り rigid analytic curve であることを証明するために用いられる定義を紹介し, その定義から導かれる eigencurve の性質として, とくに Theorem 2.5(=[9, Theorem E]) の証明を概説する. ここでの定義と Definition 1.4 (3) との整合性を保証する [9, Theorem F] については, Section 3.2 で簡単に触れさせていただく (Theorem 3.3).

3.1. Spectral curves $Z_\alpha \subset \mathcal{W} \times_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{A}^1_{\mathbb{Q}_p}$

この subsection では, 次節で eigencurve を定義するのに必要な spectral curve とよばれる $\mathcal{W} \times_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{A}^1_{\mathbb{Q}_p}$ 内の rigid analytic curve を定義する. そのために, まず overconvergent modular forms とそれらの空間のなす families の定義について概説する. 詳細は [9] の Sections 2.1, 2.2, 4.1, 4.3 をご参照いただきたい (cf. これらと併せて, 本報告集における佐々木秀氏による稿「Coleman's theory of p-adic modular forms」も参照のこと):

Definition 3.1. (1) Lemma 1.3 の記号を用いて, $\kappa \in \mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$ が finite order の character χ と $s \in \mathbb{Z}_p$ により, $\mathbb{Z}_p^\times$ 上の character として $\chi\eta_s$ と一致するとき, κ を **accessible weight-character** とよび $\kappa = (\chi, s)$ とかく. このとき, accessible weight-characters (χ, s) での値が Kubota-Leopoldt の p-進 L-関数 $L_p(\chi, s)$ と一致するような, weight space $\mathcal{W}$ の even part $\mathcal{W}^+ := \{\kappa \in \mathcal{W} \mid \kappa(-1) = 1\}$ 上の rigid analytic function とみなせる p-進 ζ-関数 $\zeta^*(\kappa)$ $(\kappa \in \mathcal{W}^+)$ を構成することができる.

任意の $\kappa \in \mathcal{W}^+$ と正の整数 n に対し,

$$\sigma_\kappa^*(n) := \sum_{p \nmid d | n} \kappa(d) d^{-1}$$

とおき, さらに,

$$\varepsilon_n(\kappa) := 2\frac{\sigma_\kappa^*(n)}{\zeta^*(\kappa)}$$

とおいて, $\mathcal{W}^+$ 上の関数を係数とした不定元 q に関する形式的冪級数

$$\boldsymbol{E}(q) := 1 + \varepsilon_1 q + \varepsilon_2 q^2 + \cdots$$

を $\mathcal{W}^+$ の identity を含む連結成分 $\mathcal{B}$ に制限したものを **Eisenstein family** とよぶ.

以下, 任意の $\kappa \in \mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$ における $\boldsymbol{E}(q)$ の特殊化を考えるときは, κ を $\mathbb{Z}_p^\times$ の pro-p 部分 $1 + p\mathbb{Z}_p$ に制限して扱う. このとき, arithmetic point $\kappa = (\chi, k)(= \chi\tau^{-k}\tau^k\eta_k)$ of weight $k \geq 2$, nebentypes character $\chi\tau^{-k}$ に対し, κ での特殊化

$$\boldsymbol{E}_\kappa(q) = 1 + \varepsilon_1(\kappa) q + \varepsilon_2(\kappa) q^2 + \cdots$$

は, weight k で character $\chi\tau^{-k}$ の classical な Eisenstein series となることに注意.

(2) $\mathbb{Q}_p$-scheme S 上の楕円曲線 $\mathcal{E}$ とそれへの group scheme としての 1 の p 乗根のなす群 $\mu_{p/S}$ の S 上の埋め込み $\alpha : \mu_p \hookrightarrow \mathcal{E}$ の組 $(\mathcal{E}, \alpha)$ を parametrize する modular

curve の compactification を $X_1(p)$ とする. 任意の正の整数 i に対し, $X_1(p)$ の affinoid subdomain で, その $\mathbb{C}_p$-valued points $(\mathcal{E},\alpha)_{/\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}}$ は $\mathrm{ord}_p(A(\mathcal{E},\eta)) \leq \frac{1}{i}$ を満たし, かつ, $\alpha(\mu_p)$ が $\mathcal{E}$ の canonical subgroup となるものとして特徴付けられるものを $Z_1(p)(\frac{1}{i})$ とかくことにする. ここで, η は $\Omega^1_{\mathcal{E}/\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}}$ の generator であり, A は level 1 の Hasse invariant modular form を表す.

一方で, n を 任意の正の整数とする. Example 0.2 で考察したように, weight space $\mathcal{W}$ を open unit disk $B(0,1)_{\mathbb{Q}_p}$ の $p-1$ 個の直積と同一視した際, 半径を $p^{-\frac{1}{n}}$ に縮めた closed disk $B[0,p^{-\frac{1}{n}}]$ の $p-1$ 個の直積と同一視される $\mathcal{W}$ の subspace を $\mathcal{W}_{\frac{1}{n}}$ とおく.

このとき, $\mathcal{W}_{\frac{1}{n}} \times_{\mathbb{Q}_p} Z_1(p)(\frac{1}{i})$ 上の rigid analytic functions のなす環を $M'_{n,i}$ とかき,

$$M^{\dagger}_{\mathcal{W}_{\frac{1}{n}}}(\frac{1}{i}) := \{F \cdot \boldsymbol{E}(q) \mid F \in M'_{n,i}\}$$

を **$\frac{1}{i}$-overconvergent modular forms のなす空間の $\mathcal{W}_{\frac{1}{n}}$ の family** とよぶ.

(3) 任意の $\kappa \in \mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$ に対し, n を十分に大きくとって, $M^{\dagger}_{\mathcal{W}_{\frac{1}{n}}}(\frac{1}{i})$ を weight κ で特殊化した空間を $M^{\dagger}_{\kappa}(\frac{1}{i})$ とおき, **$\frac{1}{i}$-overconvergent modular forms of weight κ のなす空間**とよぶ.

Remark 3.1. Definition 3.1 では, Eisenstein series の family が p-進 weight による parametrization も許すという事実を用いて, modular curve 内の適切な affinoid subdomain 上定義される rigid analytic functions であって, Eisenstein series との積をとったときに weight が 0 となるようなものを, p-進 weight の overconvergent modular forms として採用している. したがって, overconvergent modular forms をより詳しく調べるためには, Eisenstein series の family について, さらに深く理解しなければならないという実状がある. そこで, [9, Open questions in the introduction] では, 次の問いかけがなされている:

(1) overconvergent modular forms や, その families をより直接的に定義することができないか? (cf. modular curves の幾何的な性質や Eisenstein series の family を用いない overconvergent modular forms の定義としては, Buzzard [2] により $\mathbb{Q}$ 上定義された quaternion algebras の単数群上で定義する方法が示されている. この手法は, Chenevier [5] による $\mathrm{GL}_{n/\mathbb{Q}}$ 上の p-進 automorphic fomrs の研究や, Buzzard 自身 [3] や筆者 [23] による総実代数体上定義された quaternion algebras の単数群上の p-adic automorphic forms の研究などに発展している.)

(2) 一方で, Eisenstein series の family の性質, とくに zero-free な領域に関してなど, より深く理解できないか? これが進展すれば, eigencurve C_p の幾何的性質に関する理解も進むものと思われる.

さて, p と異なる素数 ℓ で添字付けられた無限変数 T_ℓ たちに関する Λ-係数の多項式環を

$$\mathcal{H}' := \Lambda[T_\ell \mid \ell \neq p: \text{ prime}]$$

とおき, さらに, $\mathcal{H}'$ に不定元 U_p を添加して得られる環を

$$\mathcal{H} := \mathcal{H}'[U_p]$$

とおく. ここで用いられている不定元 T_ℓ や U_p たちは, 以下の文脈の中で, 様々な modular fomrs のなす空間に作用する Hecke 作用素の役割を果たす. 本稿では, overconvergent modular forms やその families に作用する Hecke 作用素についての解説は省略させていただくが, 詳しくは [9, Chapter 3] をご参照いただきたい.

Definition 3.1 (3) で定義された $\frac{1}{i}$-overconvergent modular forms of weight κ の空間 $M_\kappa^\dagger(\frac{1}{i})$ は, 適切な norm を入れることで Banach 空間とみなすことができ, 任意の $\alpha \in \mathcal{H}'$ に対し, Hecke 作用素 αU_p は $M_\kappa^\dagger(\frac{1}{i})$ 上に完全連続に作用し, $M_\kappa^\dagger(\frac{1}{i})$ 上の αU_p の特性冪級数 $P_\alpha(\kappa; T) \in \mathbb{C}_p\{\{T\}\}$ が得られることが知られている (cf. [9, Section 4.1]). さらに, Definition 3.1 (2) で定義された $\frac{1}{i}$-overconvergent modular forms のなす空間の $\mathcal{W}_{\frac{1}{n}}$ 上の family $M_{\mathcal{W}_{\frac{1}{n}}}^\dagger(\frac{1}{i})$ からなる system $\{M_{\mathcal{W}_{\frac{1}{n}}}^\dagger(\frac{1}{i})\}_{n,i}$ 上に, 完全連続な作用素 U_p のなす system が作用しているという図式が得られ (cf. [9, Section 4.3]), 次の定理が証明されている:

Theorem 3.1 ([9, Theorem 4.3.1])**.** 任意の $\alpha \in \mathcal{H}'$ に対し,「overconvergent modular forms のなす空間からなる families の system $\{M_{\mathcal{W}_{\frac{1}{n}}}^\dagger(\frac{1}{i})\}_{n,i}$ 上の αU_p の特性冪級数」とよばれてしかるべき冪級数 $P_\alpha(T) \in \Lambda\{\{T\}\}$ で, 次の性質を満たすものが唯一つ存在する: 任意の $\kappa \in \mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$ に対し, $P_\alpha(T)$ の各係数に $\mathbb{Z}_p$-多元環の準同型 $\kappa : \Lambda \to \mathbb{C}_p$ を施して得られる冪級数 $\kappa(P_\alpha(T))$ は $\mathbb{C}_p\{\{T\}\}$ において, weight κ の overconvergent modular forms のなす空間 $M_\kappa^\dagger(\frac{1}{i})$ 上の αU_p の特性冪級数 $P_\alpha(\kappa; T)$ と一致する.

Definition 3.2 (cf. [9, Section 4.4])**.** 任意の $\alpha \in \mathcal{H}'$ に対し, Fredholm series $P_\alpha \in \Lambda\{\{T\}\}$ の zero locus として定まる $\mathcal{W} \times_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{A}^1_{\mathbb{Q}_p}$ 内の Fredholm hypersurface を Z_α とかき, αU_p **に付随する spectral curve** とよぶ. また, Z_α から $\mathcal{W}$ への projection を

$$\pi_\alpha : Z_\alpha \to \mathcal{W}$$

とおき, Z_α **の weight projection** とよぶ.

定義のされ方から, Z_α は rigid analytic curve であることがわかり, また, “spectral” と名付けられている通り, $\mathbb{C}_p$-valued points の性質を overconvergent Hecke eigenforms の αU_p-固有値を用いて次の定理のように特徴付けることができる:

Theorem 3.2 ([9, Theorem 4.4.1])**.** 任意の $\alpha \in \mathcal{H}'$ をとる. $\kappa \in \mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$ と $\tilde{u} \in \mathbb{C}_p^\times$ について, 次の二つの条件は同値である:
(i) $(\kappa, \frac{1}{\tilde{u}}) \in Z_\alpha(\mathbb{C}_p)$;
(ii) weight κ で αU_p-固有値が $\tilde{u}$ である overconvergent Hecke eigenform が存在する.

3.2. Spectral curves を用いた定義

この subsection では, spectral curves Z_α ($\alpha \in \mathcal{H}'$) を用いた eigencurve の定義を紹介する. 以下, Λ-多元環の準同型

$$\iota : \mathcal{H}' \to R_p; \quad T_\ell \mapsto (\mathrm{Tr}(r^{\mathrm{univ}}))(\mathrm{Frob}_\ell)$$

により, 普遍変形環 R_p を $\mathcal{H}'$ 上の多元環とみなす.

Definition 3.3 (cf. [9, Section 6.1])**.** $\iota(\alpha) \in R_p^\times$ なる任意の $\alpha \in \mathcal{H}'$ に対して, rigid analytic spaces の射 r_α を次のように定義する:

$$r_\alpha : X_p \times_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{A}^1_{\mathbb{Q}_p} \to \mathcal{W} \times_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{A}^1_{\mathbb{Q}_p}; \quad (x, t) \mapsto (\pi(x), \frac{t}{x(\iota(\alpha))}).$$

ここで, $\pi : X_p \to \mathcal{W}$ は, Definition 1.2 (3) で定義された weight projection である.
このとき, $X_p \times_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{A}^1_{\mathbb{Q}_p}$ の subspace C_p を,

$$C_p := \bigcap_{\alpha \in \mathcal{H}' \text{ with } \iota(\alpha) \in R_p} r_\alpha^{-1}(Z_\alpha)$$

と定義し, **(p-adic) eigencurve (of tame level** 1) とよぶ. 以下, C_p という記号で, Definition 1.4 (3) で定義された eigencurve ではなく, ここで定義されたものを表すことにする (ここでの定義と Definition 3.3 (3) との整合性については, 次に概説する Theorem 3.3 を参照のこと). 各 α に対し, r_α を C_p に制限して得られる射を

$$\lambda_\alpha : C_p \to Z_\alpha$$

とおく.

Remark 3.2. Definition 3.3 における C_p の定義で用いられる $\alpha \in \mathcal{H}'$ に関しての「$\iota(\alpha) \in R_p^\times$ 」という条件は, 後ほど概説する Theorem 3.4(=Theorem 2.5) の証明において, そこで考える overconvergent Hecke eigenform f の U_p-slope と αU_p-slope が一致することが重要な鍵となるので, とても大切な条件である.

Remark 3.3. Definition 1.4 (3) における定義と同様に, Definition 3.3 で与えられた定義からだけでは, eigencurve C_p が rigid analytic curve であることはすぐにはわからない. このことの証明については, 次節で概説させていただく.

Theorem 3.3 ([9, Theorem F])**.** *C_p は classical modular locus $\mathcal{M}$ の $X_p \times_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{A}^1_{\mathbb{Q}_p}$ における rigid Zariski 閉包と一致する (つまり, Definition 1.4 (3) と Definition 3.3 は $X_p \times_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{A}^1_{\mathbb{Q}_p}$ 内で同一の subspace C_p を定義している).*

Proof. ここでは, $\mathcal{M} \subset C_p(\mathbb{C}_p)$ であることだけを示す. $\mathcal{M}$ の rigid Zariski 閉包が C_p と一致することについては, C_p^{red} の既約成分の weight projection による像に無数の weights が含まれていることを保証する Theorem 2.2(=[9, Theorem B]) と C_p の $\mathbb{C}_p$-valued points が normalized overconvergent Hecke eigenforms に対応することを主張する Theorem 2.5(=[9, Theorem E]), さらに Introduction で簡単に紹介した Coleman family, つまり有限な slope を持つ Hecke eigenforms のなす p-進 analytic family の存在 ([8, Corollary B5.7.1]) を用いて [9, Section 1.5] で証明されているが, 詳細は省略させていただく.

さて, 任意の点 $(x_f, \frac{1}{u_f}) \in \mathcal{M}$ をとる. ここで, f は level p-冪, weight k, character ε の normalized Hecke eigenform としておく. このとき, $\iota(\alpha) \in R_p^\times$ なる任意の $\alpha \in \mathcal{H}'$ に対し,

$$r_\alpha(x_f, \frac{1}{u_f}) = (\pi(x_f), \frac{1}{u_f \cdot x_f(\iota(\alpha))}) \in (\mathcal{W} \times_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{A}^1_{\mathbb{Q}_p})(\mathbb{C}_p)$$

について, Lemma 1.3 により, $\mathbb{Z}_p^\times$ 上の character として $\pi(x_f) = \varepsilon\tau^k\eta_k$ であり, これは f を overconvergent Hecke eigenform とみなす際, その weight を $\mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$ の中で具現化した arithmetic point of weight k, nebentypes character ε と一致する. また, ℓ を p と異なる任意の素数とし, $\mathcal{H}'$ の Λ 上の生成元 T_ℓ に対して,

$$\begin{aligned} x_f(\iota(T_\ell)) = x_f((\mathrm{Tr}(r^{\mathrm{univ}}))(\mathrm{Frob}_\ell)) &= \mathrm{Tr}(\rho_f(\mathrm{Frob}_\ell)) \\ &= T_\ell\text{-eigenvalue of } f \end{aligned}$$

となり, 一方で, $x_f \circ \iota$ は Λ 上では f の weight による Λ の特殊化を与えるものであり, weight による特殊化と Hecke 作用素の作用は可換であることに注意して, $x_f(\iota(\alpha)) \in \mathbb{C}_p$ は f の α-固有値と一致する. したがって, f を αU_p-固有値として $u_f \cdot x_f(\iota(\alpha)) \in \mathbb{C}_p$ を持つ weight $\pi(x_f)$ の overconvergent Hecke eigenform とみなすことができるので, Theorem 3.2 により,

$$r_\alpha(x_f, \frac{1}{u_f}) \in Z_\alpha(\mathbb{C}_p)$$

であることが示された. □

今のところの状況を可換図式でまとめておけば, $\iota(\alpha) \in R_p^\times$ なる任意の $\alpha \in \mathcal{H}'$ に対して, 以下の通りである:

$$\begin{array}{ccccl} X_p \times_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{A}^1_{\mathbb{Q}_p} & \xrightarrow{r_\alpha} & \mathcal{W} \times_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{A}^1_{\mathbb{Q}_p}; & & (x,t) \mapsto (\pi(x), \dfrac{t}{x(\iota(\alpha))}) \\ \cup & & \cup & & \\ C_p & \xrightarrow{\lambda_\alpha} & Z_\alpha & & \\ \pi \searrow & & \swarrow \pi_\alpha & & \\ & \mathcal{W}. & & & \end{array}$$

以下, C_p の $\mathbb{C}_p$-valued points が normalized overconvergent Hecke eigenforms と対応するという主張を, Theorem 2.5 よりもより正確に記述するために, 術語をいくつか定義をしておく:

Definition 3.4. (1) 各点 $c = (r_c, \frac{1}{u_c}) \in C_p(\mathbb{C}_p)$ に対し, r_c を c **に付随する擬表現**とよび, u_c を c **の U_p-固有値**とよぶ. ここで, $\iota(\alpha) \in R_p^\times$ なる $\alpha \in \mathcal{H}'$ に対し, Theorem 3.1 で得られた特性冪級数 $P_\alpha(T)$ の定数項は 1 であるので, $c \in C_p(\mathbb{C}_p)$ の第 2 成分は 0 にはなり得ないことに注意.

(2) 各点 $c = (r_c, \frac{1}{u_c}) \in C_p(\mathbb{C}_p)$ に対し, $\iota : \mathcal{H}' \to R_p$ と $r_c : R_p \to \mathbb{C}_p$ の合成として得られる環の準同型を

$$\Psi_{r_c} : \mathcal{H}' \to C_p$$

とおき, さらに, U_p に u_c を対応させることを Ψ_{r_c} に合わせて得られる環の準同型を

$$\Psi_c : \mathcal{H}(= \mathcal{H}'[U_p]) \to \mathbb{C}_p$$

とおく. このとき,

$$\mathcal{F}_c := \sum_{n \geq 1} \Psi_c(\mathcal{T}_n) q^n \in \mathbb{C}_p[\![q]\!]$$

で与えられる形式的冪級数を c **の Fourie 展開**とよぶ. ここで, 各 $n \geq 1$ に対する元 $\mathcal{T}_n \in \mathcal{H}$ は, $\mathcal{T}_p := U_p$ とおき, p と異なる任意の素数 ℓ に対しては $\mathcal{T}_\ell := T_\ell$ とおいたうえで, 次の形式的な Dirichlet 級数の係数として定義されるものである:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\mathcal{T}_n}{n^s} = \prod_{\ell:\text{prime}} (1 - \mathcal{T}_\ell \ell^{-s} + [\ell]\ell^{-2s})^{-1}.$$

ただし, 記号 $[\ell] \in \Lambda$ は, $\ell = p$ のとき 0 を表し, ℓ が p と異なる素数のときは $\ell \in \mathbb{Z}_p^\times$ の $\Lambda = \mathbb{Z}_p[\![\mathbb{Z}_p^\times]\!]$ における像を表す.

Remark 3.4. 二つの点 $c, c' \in C_p(\mathbb{C}_p)$ について, Lemma 1.1 (2) により, 擬表現は trace の値で定まるので, $c = c'$ であることと $\mathcal{F}_c = \mathcal{F}_{c'}$ であることは同値な条件となる.

さて, この subsection の終わりとして, C_p の $\mathbb{C}_p$-valued points と normalized overconvergent Hecke eigenforms が対応するという Theorem 2.5 の主張を, Fourier 展開を用いてより正確に記述し, その証明を概説する:

Theorem 3.4 (=Theorem 2.5)**.** 集合の全単射

$$\{\text{normalized overconvergent Hecke eigenforms of } p\text{-power level and weight } w \text{ with finite slope}\} \to \{c \in C_p(\mathbb{C}_p) \mid \pi(c) = w\}$$

で, とくに $f(q) = \sum_{n \geq 1} a_n q^n$ という Fourier 展開をもつ f に対しては, Fourier 展開が $\mathcal{F}_c = \sum_{n \geq 1} a_n q^n$ で与えられる点 $c \in C_p(\mathbb{C}_p)$ が対応するようなものが存在する.

Remark 3.5. 上述の主張は, cuspidal な overconvergent Hecke eigenforms についてだけ触れた形になっているが, [9, Theorem E=Theorem 6.2.1] では, non-cuspidal なものもすべて含めた主張が証明されている. 本稿では, cuspidal と non-cuspidal の定義上の相違や互いの関係性, また non-cuspidal なものの扱い方についての解説は省略させていただくが, 詳しくは [9, Section 3.6] をご参照いただきたい.

Proof. level p-冪, weight w の任意の normalized overconvergent Hecke eigenform f について, その Fourier 展開は $f(q)=\sum_{n\geq 1} a_n q^n$ で与えられ, $a_p \neq 0$ であるとする. このとき,

$$c := (x_f, \frac{1}{a_p}) \in (X_p \times_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{A}^1_{\mathbb{Q}_p})(\mathbb{C}_p)$$

とおけば, $\iota(\alpha) \in R_p^\times$ なる任意の $\alpha \in \mathcal{H}'$ に対し,

$$r_\alpha(c) = (\pi(x_f), \frac{1}{a_p \cdot x_f(\iota(\alpha))}) \in (\mathcal{W} \times_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{A}^1_{\mathbb{Q}_p})(\mathbb{C}_p)$$

について, $\pi(x_f)=w$ であり $a_p \cdot x_f(\iota(\alpha))$ は f の αU_p-固有値と一致するので, Theorem 3.2 により,

$$r_\alpha(c) \in Z_\alpha(\mathbb{C}_p)$$

であり, C_p の定義により,

$$c \in C_p(\mathbb{C}_p)$$

であることがわかる. このとき, f の Hecke 固有値たちの情報は $x_f \in X_p(\mathbb{C}_p)$ により c の Fourier 展開 $\mathcal{F}_c$ の係数たちに伝播され, f の Fourier 係数と $\mathcal{F}_c$ が等しいことが保証されるので, 定理の主張にある通りの写像が得られたことになる.

逆に, $c=(r_c, \frac{1}{u_c}) \in C_p(\mathbb{C}_p)$ で $\pi(c)=w$ なるものを任意にとり, $\iota(\alpha) \in R_p^\times$ なる任意の $\alpha \in \mathcal{H}'$ の対し, $z_\alpha := \lambda_\alpha(c) \in Z_\alpha(\mathbb{C}_p)$ とおく. c の αU_p-固有値を u_α とおくと,

$$z_\alpha = (w, \frac{1}{u_\alpha}) \in Z_\alpha(\mathbb{C}_p)$$

となり, Theorem 3.2 により, weight w の overconvergent Hecke eigenform f_α で αU_p-固有値が u_α と等しいものが存在する. よって, weight w で αU_p-固有値が u_α である normalized overconvergent Hecke eigenforms の集合を $\mathcal{F}_\alpha$ とおくと, $\mathcal{F}_\alpha \neq \emptyset$ であり, ある overconvergent Hecke eigenform f が存在して,

$$\bigcap_{\alpha \in \mathcal{H}' \text{ with } \iota(\alpha) \in R_p^\times} \mathcal{F}_\alpha = \{f\}$$

となることが [9, Lemma 6.2.2] として示されている. この補題を証明する際に, $\iota(\alpha) \in R_p^\times$ という条件から等式 $\mathrm{ord}_p(u_\alpha) = \mathrm{ord}_p(u_c)$ が保証されることが, weight と slope を固定したとき, その overconvergent modular forms の空間が有限次元となることと合わせて重要な鍵となることを注意しておく (cf. Remark 3.2).

このとき, $\alpha = 1 + p\tau$ ($\tau \in \mathcal{H}$) という形の任意の α について, f と c は同じ αU_p-固有値 u_α と同じ U_p-固有値 u_c をそれぞれ持つので, f と c の τ-固有値をそれぞれ u_1, u_2 とおけば,

$$u_c + p u_c u_1 = u_\alpha = u_c + p u_c u_2$$

となる. よって, $u_c \neq 0$ であることから, $u_1 = u_2$ を得る. したがって, f と c はすべての Hecke 作用素に対して, 同じ Hecke 固有値を持つことになるので, この f が c に対応する normalized overconvergent Hecke eigenform であり, 以上の考察と Remark 3.4 を合わせて, 定理の主張にある写像の全単射性が得られた. □

4. C_p は curve である

この section では, eigencurve C_p がその名の通り rigid analytic curve であることが, [9] でどのように証明されているかについて概説する.

4.1. Local pieces $D(V)$

[9, Chapter 7] では, C_p が実際に rigid analytic curve であることを証明するために, $C_p^{\mathrm{red}} \cong D$ となる rigid analytic curve D を構成している. この D は, overconvergent modular forms に作用する Hecke 環を座標環とする affinoid varieties を貼り合わせて構成される. この subsection では, その貼り合わせの材料となる affinoid varieties $D(V)$ の構成法について概説する. 以下, affinoid varieties や admissible affinoid coverings にまつわる術語を断りなく用いるが, それらの詳細については [1] の Chapter 3 や Chapter 9, また [8, Chapter A] の該当箇所を随時ご参照いただきたい.

$\iota(\alpha) \in R_p^\times$ なる任意の $\alpha \in \mathcal{H}'$ をとる. αU_p に付随する spectral curve $Z_\alpha \subset \mathcal{W} \times_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{A}^1_{\mathbb{Q}_p}$ とその weight projection

$$\pi_\alpha : Z_\alpha \to \mathcal{W}$$

に対し, Z_α の affinoid subdomain V で, π_α を V に制限したとき $\pi_\alpha|_V : V \to \pi_\alpha(V)$ は finite な射となり (ここで, [8, Lemma A5.6] により, $\pi_\alpha(V)$ は $\mathcal{W}$ の affinoid subdomain となることに注意), かつ, V 自身 $Z_Y := \pi_\alpha^{-1}(Y)$ の中で admissible closed-open となるもの全体のなす集合を $\mathcal{C}_\alpha$ とおき, さらに既約であるものからなる $\mathcal{C}_\alpha$ の部分集合を $\mathcal{C}_\alpha^{\mathrm{irr}}$ とおく. このとき, [8, Proposition A5.8] により, $\mathcal{C}_\alpha$ は Z_α の admissible affinoid covering となることが示されている.

$\mathcal{W}$ の任意の affinoid subdomain Y に対し, $\mathcal{C}_\alpha^{\mathrm{irr}}$ の部分集合

$$\{V \in \mathcal{C}_\alpha^{\mathrm{irr}} \mid \pi_\alpha(V) = Y\}$$

と, Theorem 3.1 で得られた αU_p に付随する特性冪級数 $P_\alpha(T)$ の $A(Y)\{\{T\}\}$ における分解 $P_\alpha(T) = Q_V(T)H(T)$ で条件

$$Q_V(T) \in A(Y)[T] \text{ with } Q_V(0) = 1, \ (\text{lead. coef. of } Q_V(T)) \in A(Y)^\times;$$
$$H(T) \in A(Y)\{\{T\}\} \text{ with } \gcd(Q_V(T), H(T)) = 1 \text{ in } A(Y)\{\{T\}\}$$

を満たすもの全体のなす集合との間に, 関係式

$$V = \mathrm{Max}(A(Y)\langle T\rangle/(Q_V(T)))$$

で関係付けられる一対一対応 $V \mapsto P_\alpha(T) = Q_V(T)H(T)$ が得られる (cf. [9, page 91 in Section 7.1]). この対応において,

$$d_V := \deg Q_V(T), \quad Q_V^*(T) := T^{d_V} Q_V(\frac{1}{T})$$

とおけば, Hecke 作用素 U_p が完全連続な作用素としてうまく定まるほどに十分大きな正の整数 i をとったうえで, $\frac{1}{i}$-overconvergent modular forms のなす空間の Y 上の family $M_Y^\dagger(\frac{1}{i})$ に作用する αU_p に p-進 Banach modules の Riesz 理論を適用することで, $M_Y^\dagger(\frac{1}{i})$ は $Q_V^*(\alpha U_p)$ が 0-作用素として作用する部分 $N(V; \frac{1}{i})$ と可逆な作用素として作用する部分 $F(V; \frac{1}{i})$ により

$$M_Y^\dagger(\frac{1}{i}) = N(V; \frac{1}{i}) \oplus F(V; \frac{1}{i})$$

と直和分解される (cf. [9, page 92 in Section 7.1]). この $N(V; \frac{1}{i})$ は i が十分大きければ, i に依存しない部分加群であり, それを $N(V)$ とかくことにすれば, [8, Theorem A4.5] により, $N(V)$ は rank d_V の $A(Y)$-自由加群であることがわかっている.

ここで, eigencurve が本当に rigid analytic curve であることを証明するために必要な rigid analytic curve D の材料となる affinoid varieties $D(V)$ を定義する:

Definition 4.1. (1) 任意の $V \in \mathcal{C}_\alpha^{\mathrm{irr}}$ をとり, $Y := \pi_\alpha(V) \subset \mathcal{W}$ とおく. このとき,

$$\mathbb{T}(V) := \mathrm{Image}(\mathcal{H} \otimes_\Lambda A(Y) \stackrel{\text{natural}}{\longrightarrow} \mathrm{End}_{A(Y)}(N(V)))$$

とおいて, V **上の finite slope な overconvergent Hecke 環**とよぶ. $\mathbb{T}(V)$ は $A(Y)$ 上の affinoid 多元環であり, $\mathbb{T}(V)$ に付随する affinoid variety

$$D(V) := \mathrm{Max}(\mathbb{T}(V))$$

は Y 上 finite flat であり, その次数は d_V と一致する. $A(Y)$-多元環の構造射 $A(Y) \to \mathbb{T}(V)$ から誘導される affinoid variety の射を

$$\pi_V : \mathbb{T}(V) \to Y$$

とおくと, $\mathbb{T}(V)$ において $Q_V^*(\alpha U_p) = 0$ であるから, finite な射による可換図式

$$\begin{array}{ccc} D(V) & \stackrel{z_V}{\longrightarrow} & V \subset Z_\alpha \\ \pi_V \searrow & & \swarrow \pi_\alpha \\ & Y & \end{array}$$

が誘導される.

(2) 任意の $V \in \mathcal{C}_\alpha$ に対しては, $\mathcal{C}_\alpha^{\mathrm{irr}}$ の適切な元たち V_j を用いて, $V = \sqcup_j V_j$ とかけることから,

$$D(V) := \bigsqcup_j D(V_j)$$

と定義しておく.

$D(V)$ の valued points と normalized overconvergent Hecke eigenforms の対応関係について, [8, Theorem B5.7] と同様に, q-展開原理を用いて次の定理が証明できることが [9, page 93 in Section 7.1] で解説されている:

Theorem 4.1 ([9, Theorem 7.1.1 and Corollary 7.1.2])**.** $\iota(\alpha) \in R_p^\times$ なる任意の $\alpha \in \mathcal{H}'$ をとる. 任意の $V \in \mathcal{C}_\alpha$ に対し, $Y := \pi_\alpha(V) \subset \mathcal{W}$ とおく. $\mathbb{C}_p$ 内で $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大 L を任意にとり, $D(V)$ の任意の L-valued point $x \in D(V)(L)$ に対し, 対応する環準同型を $\eta_x : \mathbb{T}(V) \to L$ とおく. また, Y の任意の L-valued point $\kappa \in Y(L)$ に対して, V 内と $D(V)$ 内の κ 上の fiber をそれぞれ $V_\kappa, D(V)_\kappa$ とかくことにする. また, $D(V)_\kappa$ の任意の L-valued point $x \in D(V)_\kappa(L)$ に対して, level p-冪, weight κ の overconvergent Hecke eigenforms f で, 任意の $n \geq 1$ に対し, 等式 $f|\mathcal{T}_n = \eta_x(\mathcal{T}_n)f$ を満たすものたちにより L 上生成されるベクトル空間を W_x とおく. このとき,

$$\dim_L W_x = 1$$

であり, 対応 $x \mapsto W_x$ は, $D(V)_\kappa(L)$ と level p-冪 で weight κ の overconvergent Hecke eigenforms でその αU_p-固有値は $\mu(V_\kappa(L))$ のある元の逆数となっているもので生成される L 上 1 次元のベクトル空間全体のなす集合との間の全単射を与える. ここで, $\mu : \mathcal{W} \times_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{A}^1_{\mathbb{Q}_p} \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{Q}_p}$ は, 第二成分の projection を表す.

とくに, W_x が cuspidal な overconvergent Hecke eigenforms からなるときは, W_x を生成する normalized overconvergent Hecke eigenform f_x の Fourier 展開は

$$f_x(q) = \sum_{n \geq 1} \eta_x(\mathcal{T}_n) q^n \in L[\![q]\!]$$

で与えられる.

4.2. Rigid analytic curve D

この subsection では, eigencurve が rigid analytic curve であることを証明する際に用いられる rigid analytic curve D を, 前節で得られた affinoid varieties $\{D(V)\}_{V \in \mathcal{C}_\alpha}$ を貼り合わせて構成することについて概説する.

前節と同様に, ここでも $\iota(\alpha) \in R_p^\times$ なる任意の $\alpha \in \mathcal{H}'$ をとっておく. まず, $D(V)$ たちが貼り合わせに適していることを保証する補題を紹介する. 証明については, [9, Section 7.2] をご参照いただきたい:

Lemma 4.2 (cf. [9, Section 7.2])**.** (1) 二つの元 $V_1, V_2 \in \mathcal{C}_\alpha$ に対し, $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{C}_\alpha$ である.

(2) 二つの元 $V_1, V_2 \in \mathcal{C}_\alpha$ が $V_1 \subset V_2$ となっていれば, $D(V_1)$ を $D(V_2)$ の affinoid subdomain とみなすことができる.

(3) 二つの元 $U, V \in \mathcal{C}_\alpha$ に対し, (2) により $D(U \cap V)$ を $D(U)$ と $D(V)$ のそれぞれの affinoid subdomain とみなしたものをそれぞれ $D(U,V) \subset D(U), D(V,U) \subset D(V)$ とかくことにする. このとき, 自然に誘導される同型

$$\phi_{UV} : D(U,V) \xrightarrow{\sim} D(V,U)$$

について, 次の二つのことが成立する:

(i) $\phi_{UV} \circ \phi_{VU} = \mathrm{id}_{D(V,U)}$;
(ii) $D(U,U) = D(U)$ であり, $\phi_{UU} = \mathrm{id}_{D(U)}$.

(4) 三つの元 $U, V, W \in \mathcal{C}_\alpha$ に対し, $D(U \cap V) \cap D(U,W)$ は $D(U)$ 内で $D(U \cap V \cap W)$ の自然な像と一致し, 誘導される同型

$$\phi_{UVW} := \phi_{UV}|_{D(U,V)\cap D(U,W)} : D(U,V) \cap D(U,W) \xrightarrow{\sim} D(V,U) \cap D(V,W)$$

について,

$$\phi_{UVW} = \phi_{WVU} \circ \phi_{UWV}$$

となる.

Lemma 4.2 により, $(\{D(V)\}_{V \in \mathcal{C}_\alpha}, \{D(U,V)\}_{U,V \in \mathcal{C}_\alpha}, \{\phi_{UV}\}_{U,V \in \mathcal{C}_\alpha})$ で与えられる data は, [1, Proposition 9.3.2/1] で提示された affinoid varieties を貼り合わせて rigid analytic space を構成するための条件を満たすことがわかり, Definition 4.1 で得られた affinoid varieties の可換図式

$$\begin{array}{ccc} D(V) & \xrightarrow{z_V} & V \\ & \pi_V \searrow \quad \swarrow \pi_\alpha & \\ & Y & \end{array}$$

を $V \in \mathcal{C}_\alpha$ に関して貼り合わせることで, 次の Proposition が得られる. 証明の詳細については, [9, Chapter 7] でのそれぞれの該当箇所をご参照いただきたい:

Proposition 4.3. (1) ([9, Proposition 7.2.2]) $\iota(\alpha) \in R_p^\times$ なる任意の $\alpha \in \mathcal{H}'$ をとっておく. $\{D(V)\}_{V \in \mathcal{C}_\alpha}$ を affinoid covering にもつ rigid anaytic curve D_α と, affinoid varieties の射からなる data $\{z_V\}_{V \in \mathcal{C}_\alpha}$ と $\{\pi_V\}_{V \in \mathcal{C}_\alpha}$ をそれぞれ貼り合わせることで, rigid analytic spaces の射 $z_\alpha : D_\alpha \to Z_\alpha$ と $w_\alpha : D_\alpha \to \mathcal{W}$ が構成され, 次の可換図式が得られる:

$$\begin{array}{ccc} D_\alpha & \xrightarrow{z_\alpha} & Z_\alpha \\ & w_\alpha \searrow \quad \swarrow \pi_\alpha & \\ & \mathcal{W}. & \end{array}$$

このとき, D_α の $\mathcal{W}$ への **weight projection** $w_\alpha : D_\alpha \to \mathcal{W}$ は locally in-the-domain finite flat, つまり, D_α の affinoid covering である $D(V)$ たちに w_α を制限した $w_\alpha|_{D(V)} : D(V) \to V$ は finite flat な射である.

(2) ([9, Corollary 7.3.7]) (1) と同様に, $\alpha \in \mathcal{H}'$ を $\iota(\alpha) \in R_p^\times$ なる任意の元とすると, D_α と D_1 ($\alpha = 1$ の場合) は, rigid analytic curves として同型である.

(3) ([9, Corollary 7.4.2 and Proposition 7.4.5]) $D := D_1, w := w_1 : D \to \mathcal{W}$ とおくと, D は reduced であり, 次の二つのことが成立する:

(i) D の任意の既約成分 $\mathcal{D}$ に対し, $\mathcal{W}$ の既約成分 $\mathcal{W}_\mathcal{D}$ で $w(\mathcal{D}(\mathbb{C}_p)) \subset \mathcal{W}_\mathcal{D}(\mathbb{C}_p)$ かつ $\mathcal{W}_\mathcal{D}(\mathbb{C}_p) \setminus w(\mathcal{D}(\mathbb{C}_p))$ が有限集合となるものが唯一つ存在する;

(ii) D の任意の既約成分 $\mathcal{D}$ に対し, $\iota(\alpha) \in R_p^\times$ なる $\alpha \in \mathcal{H}'$ で, (2) で得られた同型と z_α の合成

$$D \xrightarrow{\sim} D_\alpha \xrightarrow{z_\alpha} Z_\alpha$$

のもと, $\mathcal{D}$ が Z_α のある Fredholm hypersurface と generically に同型となるようなものが存在する.

Remark 4.1. 次節で概説する通り, D と reduced eigencurve C_p^{red} は rigid analytic spaces として同型であるので, Proposition 4.3 の (1) は Theorem 2.3, (3) の (i) は Theorem 2.2, そして (3) の (ii) は Theorem 2.1 と全く同じ主張に他ならない.

4.3. $D \cong C_p^{\mathrm{red}}$

この subsection では, 本稿の締めくくりとして, 前節で得られた rigid analytic curve D ($\alpha = 1$ として得られるもの) と reduced eigencurve C_p^{red} が同型であることについて概説する. これにより, eigencurve C_p が有限な slopes を持つ normalized overconvergent Hecke eigenforms を parametrize する rigid analytic curve であることが保証されることになる.

Lemma 4.4. rigid analytic spaces の射

$$\delta : D \to X_p \times_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{A}^1_{\mathbb{Q}_p}; \quad x \mapsto (r_x, \frac{1}{u_x})$$

の像は C_p に含まれる. ここで, $r_x \in X_p(\mathbb{C}_p)$ と $u_x \in \mathbb{C}_p^\times$ はそれぞれ, Theorem 4.1 で x に対応する normalized overconvergent Hecke eigenform に付随する擬表現と U_p-固有値を表す.

Proof. $\iota(\alpha) \in R_p^\times$ なる任意の $\alpha \in \mathcal{H}'$ に対し, δ と

$$r_\alpha : X_p \times_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{A}^1_{\mathbb{Q}_p} \to \mathcal{W} \times_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{A}^1_{\mathbb{Q}_p}; \quad (x, t) \mapsto (\pi(x), \frac{t}{x(\iota(\alpha))})$$

との合成をとれば, 任意の $x \in D(\mathbb{C}_p)$ に対し,

$$(r_\alpha \circ \delta)(x) = r_\alpha(r_x, \frac{1}{u_x}) = (\pi(x_r), \frac{1}{u_x \cdot r_x(\iota(\alpha))})$$

となり, $u_x \cdot r_x(\iota(\alpha))$ は Theorem 4.1 で x に対応する normalized overconvergent Hecke eigenform の αU_p-固有値であるから, Theorem 3.2 により,

$$r_\alpha \circ \delta(x) \in Z_\alpha(\mathbb{C}_p)$$

を得る. よって,

$$\delta(D) \subset \bigcap_{\alpha \in \mathcal{H}' \text{ with } \iota(\alpha) \in R_p^\times} r_\alpha^{-1}(Z_\alpha) = C_p$$

となる. □

Lemma 4.4 により得られた射を改めて

$$\omega : D \to C_p$$

とかくことにする. Proposition 4.3 (3) により, D は reduced であるから, ω の像は reduced eigencurve C_p^{red} に含まれる. このとき, 次の定理が得られる:

Theorem 4.5 ([9, Theorem 7.5.1])**.** 以上の設定のもと,

$$\omega : D \to C_p^{\mathrm{red}}$$

は rigid analytic spaces の同型となる. とくに, C_p は rigid analytic curve である.

Proof. ここでは, 証明の outline だけを概説する. 詳細は [9, Section 7.5] を参照していただきたい.

Step 1: Theorem 3.4 と Theorem 4.1 により, C_p^{red} と D の $\mathbb{C}_p$-valued points はそれぞれ有限な slopes を持つ normalized overconvergent Hecke eigenforms と一対一対応の間柄にあることから, ω が $\mathbb{C}_p$-valued points 上では全単射であることがわかる.

Step 2: D の 任意の既約成分 $\mathcal{D}$ に対し, $\iota(\alpha) \in R_p^{\times}$ なるある $\alpha \in \mathcal{H}'$ が存在して, Z_α のある reduced な既約成分 V と $\mathcal{D}$ は ω のもと generically に同型となることと, さらに V 上の D 内の fiber D_V について, $\omega|_{D_V}$ が generically に同型となることが証明でき, これらの事実と Step 1 を合わせることで, ω 自身が generically に同型であることを示すことができる.

Step 3: 任意の $V \in \mathcal{C}_1$ に対し, X_p のある affinoid open subspace $\mathcal{X}$ と $\mathbb{A}^1_{\mathbb{Q}_p}$ のある affinoid open subspace U が存在して, δ を $D(V)$ に制限すると $\delta(D) \cap (\mathcal{X} \times_{\mathbb{Q}_p} U)$ 内への surjective な closed immersion となることが証明でき, $\delta = \omega$ が $\mathbb{C}_p$-valued points 上全単射であることと $D(V)$ が reduced であることから, ω が $D(V)$ 上では同型となることを示すことができる.

Step 4: X_p の affinoid open subspace $\mathcal{X}$ で, $W := \pi(\mathcal{X})$ が $\mathcal{W}$ の affinoid open subspace となるものを任意にとる. 任意の $t \in \mathbb{Q}$ に対し,

$$\begin{aligned} D(W,t) &:= \{x \in D \mid w(x) \in W,\ -\mathrm{ord}_p(\mu(z_\alpha(x))) \leq t\}, \\ C(\mathcal{X},t) &:= C_p^{\mathrm{red}} \cap (\mathcal{X} \times_{\mathbb{Q}_p} B[0,p^t]) \end{aligned}$$

と定義すると,

$$\omega(D(W,t)) \subset C(\mathcal{X},t)$$

となり, $\{D(W,t)\}_{W=\pi(\mathcal{X}),t}$ と $\{C(\mathcal{X},t)\}_{\mathcal{X},t}$ はそれぞれ D と C_p^{red} の admissible affinoid covering であることが証明できる.

Step 1 と Step 2 により, ω は $\mathbb{C}_p$-valued points 上で全単射で generically に同型な射であることがわかっているので, $D(W,t)$ のある有限部分集合 S が存在して, ω を $A := D(W,t) \setminus S$ に制限することで, 同型

$$\omega|_A : A \xrightarrow{\sim} B := C(\mathcal{X},t) \setminus \omega(S)$$

が得られる. $\omega|_A$ の逆写像を

$$\psi := (\omega|_A)^{-1} : B \xrightarrow{\sim} A$$

とおく. Step 3 により, ω は locally に同型であることがわかっているので, $D(W,t)$ における S の affinoid な開近傍 U と $C(\mathcal{X},t)$ における $\omega(S)$ の affinoid な開近傍 V をうまくとって, 同型

$$\omega|_U : U \xrightarrow{\sim} V$$

が得られる．これの逆写像

$$(\omega|_U)^{-1} : V \xrightarrow{\sim} U$$

と ψ を貼り合わせることで，同型

$$\rho(\mathcal{X}, t) : C(\mathcal{X}, t) \xrightarrow{\sim} D(W, t)$$

で $\rho(\mathcal{X}, t) = (\omega|_{D(W,t)})^{-1}$ となるものが構成される．以上の考察のもと，$\mathcal{X}$ と t を動かして，$\rho(\mathcal{X}, t)$ たちを貼り合わせることで，ω の逆写像

$$\omega^{-1} : C_p^{\mathrm{red}} \xrightarrow{\sim} D$$

が構成される． □

References

[1] S. Bosch, U. Güntzer and R. Remmert, "Non-Archimedean Analysis," Grundlehren der math. Wissenschaften **261**, 1984.

[2] K. Buzzard, On p-adic families of automorphic forms, *Progress in Mathematics* **224** (2004), 23-44.

[3] K. Buzzard, Eigenvarieties, pp. 59-120, *in* "L-functions and Galois Representations" (D. Burns, K. Buzzard and J. Nekovář, Eds.), Cambridge University Press, 2007.

[4] F. Calegari, The Coleman-Mazur eigencurve is proper at integral weights, *Algebra and Number Theory* **2** No. **2** (2008), 209-215.

[5] G. Chenevier, Familles p-adiques de formes automorphes pour $\mathrm{GL}(n)$, *J. reine angew. Math.* **570** (2004), 143-217.

[6] G. Chenevier, On the infinite fern of Galois representations of unitary type, preprint, 2009.

[7] R.F. Coleman, Classical and overconvergent modular forms, *Invent. Math.* **124** (1996), 214-241.

[8] R.F. Coleman, P-adic Banach spaces and families of modular forms, *Invent. Math.* **127** (1997), 417-479.

[9] R.F. Coleman and B. Mazur, The eigencurve, pp. 1-113, *in* "Galois Representations in Arithmetic Algebraic Geometry" (A.J. Scholl and R.L. Taylor, Eds.), Cambridge University Press, 1998.

[10] R.F. Coleman, G. Stevens and J. Teitelbaum, Numerical experiments on families of p-adic modular forms, pp. 143-158, *in* "Computational Perspectives on Number Theory, Proceedings of a Conference in Honor of A.O.L. Atkin," AMS/IP studies in advanced mathematics, vol. **7**, 1998.

[11] M. Emerton, 2-Adic modular forms of minimal slope, Harvard doctoral thesis, 1998.

[12] A.J. de Jong, Crystalline Dieudonné module theory via formal and rigid geometry, *Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math.* No. **82** (1996), 5-96.

[13] H. Hida, Iwasawa modules attached to congruences of cusp forms, *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.* 4e série **19** (1986), 231-273.

[14] H. Hida, Galois representations into $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p[\![X]\!])$ attached to ordinary cusp forms, *Invent. Math.* **85** (1986), 545-613.

[15] H. Hida, *Modular Forms and Galois Cohomology*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **69**, Cambridge University Press, 2000.

[16] M. Kisin, Deformations of $G_{\mathbb{Q}_p}$ and $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ representations, preprint (to appear as Appendix to Colmez's paper on p-adic local Langlands).

[17] Q. Liu and van der Put, On one-dimensional separated rigid spaces, *Indagationes Mathematicae*, New Series vol. **6** no. **4** (1995), 439-451.

[18] B. Mazur, An "infinite fern" in the universal deformation space of Galois representations, *Collect. Math.* **62** (1997), 155-193.

[19] S. Sen, Continuous cohomology and p-adic Galois representations, *Invent. Math.* **62** (1981), 89-116.

[20] S. Sen, Analytic variation of p-adic Hodge structures, *Ann. of Math.* **127** (1988), 647-661.

[21] D. Wan, Dimension variation of classical and p-adic modular forms, *Invent. Math.* **133** (1998), 449-463.

[22] A. Wiles, On ordinary λ-adic representations associated to modular forms, *Invent. Math.* **94** (1988), 529-573.
[23] A. Yamagami, On p-adic families of Hilbert cusp forms of finite slope, *J. of Number Theory* **123** (2007), 363-387.

Department of Mathematics, Kyoto Sangyo University, Kyoto, 603-8555, Japan
E-mail address: ayama30@cc.kyoto-su.ac.jp